
Aksjomatyczna teoria mnogości - Lista 1 (2025)

Zad. 1 Podaj parę zasadniczo różnych przykładów drzew o nieprzeliczalnej wysokości. Jak *grube* i jak *chude* mogą być takie drzewa? Jak grube mogą być, jeśli założymy skończoną rozgałęzialność?

Zad. 2 Podaj przykład drzewa $(T, \leq_T)$ takiego, że dla każdego $t \in T$ istnieje $s \in T$ taki, że $t <_T s$, ale T nie ma kofinalnej gałęzi.

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli drzewo T zawiera łańcuch mocy κ , to zawiera również antyłańcuch mocy κ . Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zad. 4 Pokaż, że nie istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów ω , która jest dobrze uporządkowana przez $\subseteq$. Czy w tym stwierdzeniu słowo “dobrze” można zastąpić przez “liniowo”?

Zad. 5 Na wykładzie zdefiniowaliśmy zbiór

$$\mathcal{F} = \{f: \text{dom}(f) \subseteq \omega_1, \text{rng}(f) \subseteq \omega, |\omega \setminus \text{rng}(f)| = \omega, f \text{ jest 1-1} \}$$

i relację

$$f \subseteq^* g \iff \text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(g) \wedge \{\alpha: f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \text{ jest skończony.}$$

Pokazaliśmy też, że jeżeli $f_0 \subseteq^* f_1 \subseteq^* f_2 \subseteq^* \dots$ ($f_n \in \mathcal{F}$), to istnieje $f \in \mathcal{F}$ taki, że $f_n \subseteq^* f$ dla każdego n .

a) Uzasadnij, że istnieje w takim razie ciąg $(f_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ taki, że $f_\alpha \subseteq^* f_\beta$ dla $\alpha < \beta$.

b) Niech $T = \{f \in \mathcal{F}: \exists \alpha f_\alpha \subseteq^* f, f \subseteq^* f_\alpha\}$. Pokaż, że $(T, \subseteq)$ jest drzewem Aronszajna.

Zad. 6 Niech $(T, \leq_T)$ będzie drzewem. Załóżmy, że $\preceq$ jest liniowym porządkiem na T i zdefiniujmy porządek leksykograficzny na T :

$$s \leq_{lex} t \iff s \leq_T t \vee (s, t \text{ są nieporównywalne i } s(\Delta(s, t)) \preceq t(\Delta(s, t)),$$

przy czym $\Delta(s, t) = \min\{\alpha: s(\alpha) \neq t(\alpha)\}$, a $s(\alpha)$ to (jedyne) element T z poziomu α taki, że $s(\alpha) \leq_T s$. (Uwaga. Porządek $\preceq$ jest nam potrzebny tylko do porządkowania zbiorów następników.)

a) Pokaż, że $\leq_{lex}$ jest porządkiem liniowym,

b) Jaki warunek musi spełniać drzewo T , żeby $(T, \leq_{lex})$ był porządkiem gęstym?

c) Znajdź drzewo T takie, żeby $(T, \leq_{lex})$ był izomorficzny z $(\mathbb{N}, \leq)$. Z $(\mathbb{Q}, \leq)$. Z $(\mathbb{R}, \leq)$. (Żeby uniknąć trywialnych rozwiązań załóż, że każdy element ma skończenie wiele następników).

c) Pokaż, że jeżeli T jest drzewem Aronszajna, to $(T, \leq_{lex})$ nie zawiera przeliczalnego zbioru gęstego.

Zad. 7 Pokaż, że istnieje krzaczaste drzewo Aronszajna, tzn. takie drzewo Aronszajna, którego każdy wierzchołek ma nieskończenie wiele następników.