

Zad. 1 Niech $M \prec_{\Sigma} V$ i niech $f \in M$ będzie funkcją i $x \in \text{dom}(f) \cap M$. Pokaż, że $f(x) \in M$. A potem, pokaż, że $2^{\omega} \in M$.

Zad. 2 Rozważmy funkcję $F: \omega_1 \rightarrow [\omega_1]^{<\omega}$. Powiemy, że zbiór $A \subseteq \omega_1$ jest wolny (w sensie F), jeżeli $a \notin F(a')$ dla każdego $a \neq a' \in A$. Używając przeliczalnych podmodeli udowodnij, że dla każdej funkcji istnieje nieprzeliczalny zbiór wolny. Wskazówka: zacznij od przeliczalnego podmodelu M zawierającego F jako element. Niech $\alpha \in \omega_1 \setminus M$. Rozważ maksymalny wolny podzbiór $\omega_1 \setminus (F(\alpha) \cap M)$.

Zad. 3 Niech κ będzie regularną liczbą kardynalną, x - zbiorem i niech Σ będzie skończonym zbiorem formuł. Pokaż, że istnieje model $x \in M \prec_{\Sigma} V$ taki, że $|M| < \kappa$ i $M \cap \kappa \in \kappa$. Wskazówka: skonstruuj rosnący ciąg modeli (M_{α}) zawierających coraz dłuższe odcinki początkowe liczb porządkowych.

Zad. 4 Dla liczby kardynalnej κ definiujemy H_{κ} jako klasę zbiorów dziedzicznie mocy mniejszej niż κ (tzn. $x \in H_{\kappa}$, jeżeli $|x| < \kappa$, dla każdego $y \in x$, $|y| < \kappa$, etc.). Pokaż, że H_{κ} jest zbiorem. Przekonaj się, że istnieje κ takie, że $V_{\kappa} \neq H_{\kappa}$. Pokaż, że dla każdego λ istnieje $\kappa > \lambda$ takie, że $V_{\kappa} = H_{\kappa}$.

Zad. 5 Przeprowadź dyskusję, które aksjomaty ZFC są spełnione w V_{κ} , a które w H_{κ} (i co ewentualnie potrzebujemy założyć o κ).

Zad. 6 (★) Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu. Twierdzenie o refleksji mówi nam, że możemy znaleźć model dla każdego skończonego fragmentu ZFC. Twierdzenie o zwartości mówi, że jeśli każdy skończony fragment danej teorii jest niesprzeczny, to teoria jest niesprzeczna. W takim razie ZFC jest niesprzeczna.