

**Zad. 1**    Pokaż, że jeżeli  $\kappa$  jest Mahlo, to jest  $\kappa$ -słabo nieosiągalna.

**Zad. 2**    Pokaż, że jeżeli  $\kappa$  jest liczbą rzeczywiście mierzalną, to jest regularna. (Przypomnienie:  $\kappa$  jest rzeczywiście mierzalna, jeżeli istnieje miara  $\mu$  na  $\kappa$ , niekoniecznie zero-jedynkowa, taka, że  $\mu(\bigcap_{\alpha < \lambda} A_\alpha) = 1$  dla każdej rodziny  $(A_\alpha)_{\alpha < \lambda}$  zbiorów miary 1, przy czym  $\lambda < \kappa$ .)

**Zad. 3**    Pokaż, że  $\omega_1$  nie jest rzeczywiście mierzalna. Wskazówka: użyj macierzy Ulama.

**Zad. 4**    Niech  $\kappa$  będzie najmniejszą liczbą kardynalną, na której istnieje miara (znikająca na punktach). Pokaż, że każda miara na  $\kappa$  jest  $\kappa$ -zupełna.

**Zad. 5**    Niech  $j: M \rightarrow N$  będzie elementarnym włożeniem o punkcie krytycznym  $\kappa$ . Pokaż, że rodzina  $\mathcal{U}$  podzbiorów  $\kappa$  definiowana przez:

$$X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X),$$

jest ultrafiltrem na  $\kappa$ .