

Zad. 1 Podaj przykład wykresu funkcji dwóch zmiennych, która

- a) ma jedno maksimum i żadnego minimum;
- b) ma dwa maksima i żadnego minimum;
- c) ma jeden punkt siodłowy i żadnego ekstremum.

Zad. 2 Zbadaj, czy punkt $(0, 0)$ jest ekstremum poniższych funkcji.

- a) $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2$,
- b) $f(x, y) = x^3 - 2x + y^2 + 1$.

Zad. 3 Znajdź ekstrema funkcji i zbadaj, czy są to maksima czy minima.

- a) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + y$,
- b) $f(x, y) = (\frac{1}{2}y^2 + 2x)e^x$,
- c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
- d) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5$,
- e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$,
- f) $f(x, y) = \frac{2}{3}y^3 + 3x^2y - 5y - 6x$.

Zad. 4 Znajdź ekstrema warunkowe funkcji przy zadanych warunkach.

- a) $f(x, y) = y^2 + x^2 + 2y + 1, \quad x = 0$,
- b) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{2}{3}, \quad y - x - 1 = 0$,
- c) $f(x, y) = x + y, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$,
- d) $f(x, y) = 2x - 3y + 1, \quad 3x^2 + y^2 = 2$,
- e) $f(x, y) = x^3 + y^3, \quad x + y - 2 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$,
- f) $f(x, y) = xy, \quad x^2 + y^2 = 8$.

Zad. 5 Mamy do dyspozycji 15 m siatki ogrodowej. Możemy nią ogrodzić teren w kształcie prostokąta. Jaki prostokąt wybrać, aby ogrodzone pole było jak największe? Innymi słowy, który z prostokątów o obwodzie 15 ma największe pole? Rozwiąż ten problem znajdując ekstrema warunkowe odpowiedniej funkcji. (a co, jeśli teren nie musi być w kształcie prostokąta? literatura (1) podaje, jak to zadanie rozwiązuje prawdziwy matematyk)

Zad. 6 Rzeka ma kształt wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$ (rozważamy tu tylko $x > 0$). Który punkt na rzece jest najbliższy punktowi $(0, 0)$ układu współrzędnych? Rozwiąż ten problem znajdując minimum warunkowe funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ (dlaczego takiej?) przy warunku $xy - 1 = 0$ (dlaczego takim?). Jak przeformułować to zagadnienie, żeby znaleźć punkt rzeki najbliższy punktowi $(0, 1)$?

Zad. 7 Rafineria musi przesłać swój produkt do portu. Z rafinerii do portu prowadzą trzy rurociągi. Przesłanie x baryłek ropy pierwszym rurociągiem kosztuje x^2 , drugim $2x^2$, a trzecim $3x^2$. Jak rozłożyć ładunek 100 baryłek ropy, aby koszt jego transportu był jak najmniejszy? Ułóż funkcję kosztów $f(x, y, z)$, gdzie x – ilość ropy przesłana pierwszym rurociągiem, y – drugim, a z – trzecim. Znajdź jej minimum przy odpowiednim warunku.

Zad. 8 Przekrój kanału ma kształt prostokąta. Dno i boki kanału są wykładane kostką. Jakie powinny być wymiary przekroju kanału, aby jego pole wyniosło $10m^2$, a budowa kanału była jak najtańsza? Rozwiąż to zadanie znajdując ekstrema warunkowe odpowiedniej funkcji. A co, jeśli przekrój miałby kształt trapezu równoramienneego? Ułóż odpowiednią funkcję (dwóch podstaw i wysokości) i warunek.

Literatura dodatkowa:

(1) http://www.math.uni.wroc.pl/rekrutacja/?menu=8&sub=8_1

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>