

Zad. 1 Rozwiąż poniższe równania różniczkowe liniowe.

a) $y' - 3y = 3; y(0) = 1;$

b) $y' - 2y = e^{3x}; y(0) = 2;$

c) $y' - \frac{3}{x}y = 4; y(1) = 1;$

d) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{9}{x^3}; y(2) = 3.$

Uwaga. Na wykładzie robiliśmy zadania podobne do niektórych z poniższych. Mimo to zachęcam do próby zrobienia poniższych zadań samodzielnie od początku, jedynie w ostateczności posiłkując się notatkami z wykładu. Nie powinno się rozwiązywać tych zadań podstawiając tylko dane do wyprowadzonych na wykładzie wzorów.

Zad. 2 (z cyklu “fala zbrodni”) Sherlock Holmes znalazł ofiarę zabójstwa o godzinie 22. Temperatura zwłok wynosiła wtedy 27°C . Po pół godzinie doktor Watson zmierzył 25°C . Użyj prawa stygnięcia Newtona do znalezienia godziny morderstwa. Sherlock Holmes musi brać pod uwagę możliwość, że ofiara zabójstwa miała gorączkę. Jak zmieniłaby się godzina morderstwa, gdyby ofiara miała tego dnia 40 stopni gorączki?

Zad. 3 (słone) W zbiorniku znajduje się 60 litrów roztworu zawierającego 5 kg rozpuszczonej soli. W ciągu każdej minuty do zbiornika wpływają 3 litry (czystej) wody i wypływają 2 litry roztworu. Ile soli będzie w zbiorniku po upływie 40 minut? Zakładamy, rzecz jasna, że sól natychmiast rozpuszcza się w wodzie.

Zad. 4 (słodkie) Lody na patyku (zakładamy, że są w kształcie kuli) zjadamy w tempie proporcjonalnym do (aktualnej) powierzchni (dla ułatwienia: zakładamy, że stale zachowany jest kulisty kształt lodów). Znajdź równanie opisujące objętość lodów w zależności od czasu.

Zad. 5 Wyjaśnij, co oznacza czas połowicznego zaniku i dlaczego pojęcie to ma sens w przypadku reakcji pierwszego rzędu, natomiast w przypadku reakcji drugiego rzędu jest mało użyteczne.

Zad. 6 (z cyklu “mówią wieki”) W żywych organizmach stosunek liczby atomów izotopu węgla ^{14}C do liczby atomów izotopu ^{12}C jest mniej więcej stały. Po śmierci organizmu następuje rozpad promieniotwórczy ^{14}C . Wiedząc, że czas jego połowicznego rozpadu wynosi 5700 lat, oszacuj jaka jest zawartość procentowa ^{14}C w znaleziskach z Pompejów. Archeolodzy stwierdzili 76% ^{14}C w pewnym znalezisku. Pomiar ten dokonany został z dokładnością do 1% . Oszacuj wiek znaleziska.

Zad. 7 W 1987 roku Arthur Segal zaproponował następujący opis zmian ludzkiej wagi

$$\frac{dw}{dt} + 0,005w = \frac{1}{7000}K,$$

gdzie $w(t)$ jest masą człowieka, który przez t dni konsumował dokładnie K kalorii dziennie. Pewna ważąca 75 kg osoba przeszła na dietę zawierającą 2100 kalorii dziennie. Ile będzie ona ważyć po 30 dniach przestrzegania tej diety? Znajdź i zinterpretuj $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t)$.

Oszacuj, ile kalorii powinnaś / powinieneś spożywać dziennie, aby w ciągu trzech miesięcy ważyć 80 kg.

Zad. 8 Rozwój populacji liczącej $M(t)$ osobników w chwili t można opisać równaniem Verhulsta

$$M'(t) = aM(t) - bM^2(t),$$

gdzie $M(t)$ jest liczebnością populacji po czasie t . Dla populacji ludzkiej $a = 0,029$, natomiast $b = 2,94110^{-12}$. Znajdź rozwiązanie ogólne tego równania (w razie problemów - skonsultuj z zadaniem nr 7 z poprzedniej listy; część rachunkowa tych zadań jest zbliżona), a następnie równanie szczególne $M(t)$ dla naszej populacji (trzeba zadać jakiś (jaki? patrz np. literatura 2)) warunek początkowy). Następnie oblicz, ilu ludzi będzie zamieszkiwać Ziemię za dwadzieścia lat. Znajdź i zinterpretuj $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)$.

Zad. 9 Znajdź rozwiązania szczególne poniższych równań spełniających zadane warunki początkowe.

- a) $y'' - y = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 1$;
- b) $3y'' - 10y' + 3y = 2$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$;
- c) $y'' + 2y' + y = 1$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 4$;
- d) $y'' + y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

Zad. 10 Znajdź rozwiązania szczególne poniższych równań spełniających zadane warunki brzegowe.

- a) $y'' - 8y' + 16y = 0$; $y(0) = 1$; $y(1) = e^4$;
- b) $2y'' - 5y' + 2y = -1$; $y(0) = 0$; $y(2) = e^4 - e$;
- c) $y'' - 3y' = 13$; $y(0) = 3$; $y(1) = 2 + e^3$;
- d) $y'' + 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y(2) = 2$.

Zad. 11 Znajdź wzór na drogę w ruchu, w którym przyspieszenie zależy od prędkości w następujący sposób: $a = 2v - 3$.

Zad. 12 Równanie różniczkowe

$$y'' + 5y' + 4y = 8$$

jest typowym równaniem, które pojawia się przy badaniu krzywej uczenia się szczura w pewnych eksperymentach psychologicznych. Znajdź rozwiązanie szczególne tego równania spełniające warunki $y(0) = 1$ i $y'(0) = 1$. Znajdź granicę tego rozwiązania przy $t \rightarrow \infty$.

Literatura dodatkowa:

- 1) Na stronie <http://www.javaview.de/demo/PaExpr0de.html> znajduje się program do rysowania rozwiązań szczególnych równań również drugiego rzędu (pole *Order* określa rząd równania).
- 2) Na stronie <http://www.census.gov/ipc/www/popclockworld.html> można sprawdzić aktualną liczbę mieszkańców Ziemi. Obecnie podaje on liczbę 6,668,415,491.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>