

Uwaga Rozwiązywanie poniższych zadań na ćwiczeniach jest zabronione. W razie uwag i pytań należy konsultować się na konsultacjach.

Zad. 1 Narząd ma dwa przedziały oddzielone błoną. Przez $x(t)$ oznaczmy stężenie leku w pierwszym przedziale w czasie t , a przez $y(t)$ stężenie w drugim z nich (t mierzymy w godzinach). Na początku w żadnym z przedziałów nie było żadnych śladów leku. Do pierwszego przedziału wstrzykujemy 50 jednostek leku. Jego przepływ opisywany jest przez równania

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - 5x \\ \frac{dy}{dt} &= x - 5y.\end{aligned}$$

Znajdź stężenie leku w każdym z przedziałów po 30 minutach i po godzinie. Znajdź i zinterpretuj $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Zad. 2 Populacje x, y (liczone w tysiącach) rywalizujących ze sobą gatunków spełniają poniższe zagadnienie początkowe:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0,09x - 0,02y \\ \frac{dy}{dt} &= -0,02x + 0,06y \\ x(0) &= 200, \quad y(0) = 150,\end{aligned}$$

przy czym t mierzymy w latach. Znajdź rozwiązanie powyższego zagadnienia i zanalizuj jego zachowanie (czy któryś z gatunków wyginie?).

Zad. 3 Układ równań różniczkowych opisujący współistnienie dwóch gatunków zwierząt, z których jeden (*rysie*, $x(t)$) żywi się osobnikami drugiego gatunku (*zającami* ($y(t)$)), opisują nieco inne równania:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (k - ay)x \\ \frac{dy}{dt} &= (cx - p)y.\end{aligned}$$

Wytłumacz, skąd biorą się różnice między układem z zadania 2 a powyższym. Rozważ, co się dzieje z populacją drapieżników, kiedy populacja zającej jest mała. A co z populacją ofiar, kiedy jest mało rysów? (Uwaga, nie należy próbować rozwiązywać powyższego układu. Można natomiast oglądać rozwiązania na stronie

<http://www.jens-langner.de/dessolver/> (instrukcje znajdują się na mojej stronie).

Powyższy układ równań nazywany jest układem Volterry-Lotka. Volterra użył go do opisu populacji ryb odławianych w Morzu Adriatyckim, natomiast Alfred Lotka niezależnie od niego odkrył ten układ przy opisie oscylacji stężeń substancji chemicznych.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>