Zastosowania kombinatoryki nieskończonej lista 0 2014

Dobre porządki i indukcja pozaskończona.

Zad. 1 Jaka może być moc liniowo uporządkowanego podzbioru $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$?

Zad. 2 Rozważmy rodzinę zbiorów $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Pokaż, że istnieje rodzina $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ zbiorów parami rozłącznych takich, że dla każdego α $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ i $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$.

Zad. 3 O podzbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że jest $\mathfrak{c}$-*gęsty*, jeśli tnie się z każdym niepustym przedziałem otwartym na zbiorze mocy $\mathfrak{c}$. Pokaż, że $\mathbb{R}$ można podzielić na $\mathfrak{c}$ parami rozłącznych zbiorów $\mathfrak{c}$-gęstych.

Zad. 4 Pokaż, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który ma dokładnie dwa punkty wspólne z każdą prostą.

Zad. 5 Pokaż, że $\mathbb{R}^3$ bez punktu jest sumą rodziny parami rozłącznych prostych.

Zad. 6 Pokaż, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą dwóch funkcji różnowartościowych.

Zad. 7 Udowodnij, że każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Zad. 8 Pokaż, że istnieje rodzina $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taka, że $T_\alpha \setminus T_\beta$ jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < \beta$.

Zad. 9 Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą ($A \subseteq \mathbb{R}$). Pokaż, że f można rozszerzyć do funkcji ciągłej $\hat{f}\colon B \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subseteq B$ i $B \in \Pi^0_2$.

Zad. 10 Skonstruuj funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest nieciągła na każdym podzbiorze mocy $\mathfrak{c}$. (Wskazówka: użyj poprzedniego zadania).

Zad. 11 Pokaż, że istnieje liczba porządkowa ϵ taka, że $\omega^\epsilon = \epsilon$.

Zad. 12 Udowodnij, że każdy podzbiór domknięty $A \subseteq \mathbb{R}$ jest sumą zbioru doskonałego i przeliczalnego.

Zad. 13 Niech $\mathcal{B}_0 = C[0,1]$ (przestrzeń funkcji ciągłych). Dla liczby porządkowej α niech $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ składa się z funkcji będących granicami punktowymi funkcji z $\mathcal{B}_\alpha$. Co to jest $\mathcal{B}_1$? Jaka jest najmniejsza liczba γ taka, że $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_{\gamma+1}$? Co to jest $\mathcal{B}_\gamma$?

Zad. 14 Wskaż przestrzeń topologiczną taką, że ω_1 jest jej rangą Cantora-Bendixsona.

Zadania rekreacyjne

Zad.* **15** Pokaż, że każdy ciąg Goodsteina zbiega do 0.

Zad. 16 Rozważmy automat do gry o następującym działaniu: po wrzuceniu złotówki automat wydaje nam dwa złote. Jak grać, żeby spłukać się po nieskończeniu wielu rundach? *Wersja trudniejsza: załóżmy, że stosujemy w tej grze strategię losową (przy czym począwszy od drugiego ruchu korzystamy tylko z monet wydanych przez automat). Pokaż, że z prawdopodobieństwem* 1 *po nieskończenie wielu rundach przegramy wszystkie pieniądze.*

Oszustwo teoriomiarowe. Załóżmy hipotezę continuum. W barze dwie osoby grają w lotki. Profesor Bufini proponuje im demonstrację następującej sztuczki: pod nieobecność profesora obydwaj gracze wykonają po jednym rzucie, a wtedy on, wnioskując jedynie na podstawie śladów po lotkach, odgadnie, który gracz rzucał pierwszy. Jak profesor chce dokonać sztuczki? Otóż zawczasu, używając hipotezy continuum, ustawił on wszystkie punkty tarczy w ciąg długości ω_1. Widząc ślady po rzutach wnioskuje następująco: pierwszy musiał rzucać gracz, który trafił w punkt o niższym numerze. Istotnie, załóżmy, że pierwszy gracz trafił w punkt r_α. Zbiór punktów o numerach niższych niż α jest przeliczalny, a więc miary Lebesgue'a 0. W takim razie drugi gracz z prawdopodobieństwem 1 trafił w punkt o wyższym numerze. Gdzie tkwi błąd w rozumowaniu profesora Bufiniego?

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`