Zastosowania kombinatoryki nieskończonej lista 1 2014

$P(\omega)/Fin$**, ideały i przestrzenie Mrówki.**

Zad. 1 Ideał $\mathcal{I} \subseteq P(\omega)$ jest P**-ideałem**, jeżeli dla każdego ciągu $(I_n)_n$ elementów $\mathcal{I}$ znajdziemy $I \in \mathcal{I}$ taki, że $I_n \subseteq^* I$. Pokaż, że ideał zbiorów sumowalnych i ideał zbiorów gęstości 0 są P-ideałami.

Zad. 2 Ideał $\mathcal{I} \subseteq P(\omega)$ jest **gęsty**, jeżeli każdy nieskończony $A \subseteq \omega$ zawiera nieskończony element ideału. Pokaż, że ideał zbiorów sumowalnych i ideał zbiorów gęstości 0 są gęste.

Zad. 3 Niech $f \colon \omega \to \mathbb{R}^+$. Rozważmy ideał

$$\mathcal{I}_f = \{A \subseteq \omega \colon \sum_{i \in A} f(i) < \infty\}.$$

Dla jakich f ideał $\mathcal{I}_f$ jest właściwy, dla jakich główny, dla jakich gęsty, a dla jakich jest P-ideałem?

Zad. 4 Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem maksymalnym. Co można powiedzieć o gęstości $\mathcal{I}$? Czy $\mathcal{I}$ może być P-ideałem? (Wskazówka: użyj hipotezy continuum.) Czy $\mathcal{I}$ może nie być P-ideałem? (Wskazówka: rozważ ideał maksymalny, który zawiera ideał zbiorów gęstości 0.)

Zad. 5 Pokaż, że jeśli przestrzeń X jest normalna i pseudozwarta, to jest przeliczalnie zwarta.

Zad. 6 Niech $\mathcal{A}$ będzie maksymalną rodziną prawie rozłączną. Pokaż, że $\Psi(\mathcal{A})$ jest pseudozwarta, lecz nie przeliczalnie zwarta.

Zad. 7 Udowodnij, że nie istnieje ω-luka.

Zad. 8 Niech X będzie zbiorem przeliczalnym. Rozważmy zbiór $G \subseteq [X]^2$ skończonych grafów o wierzchołkach w X. Niech $\mathcal{G}$ będzie ideałem zbioru G składającym się z grafów o skończonej liczbie chromatycznej. Czy $\mathcal{G}$ jest gęsty? Czy jest P-ideałem? Jaka jest jego złożoność borelowska?

Zad. 9 Pokaż, że $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \subseteq \omega$ albo $A \in \mathcal{I}$ albo $A^c \in \mathcal{I}$.

Zad. 10 Niech $\mathcal{I} \subseteq P(\omega)$ będzie ideałem maksymalnym (nie głównym). Pokaż, że $\{\chi_A \colon A \in \mathcal{I}\} \subseteq \{0,1\}^\omega$ jest zbiorem niemierzalnym (w sensie standardowej miary μ na $\{0,1\}^\omega$: na zbiorze $\{0,1\}$ określamy miarę $\mu_i(\{0\}) = \mu_i(\{1\}) = 1/2$; μ jest miarą produktową $\Pi_i \mu_i$). Wskazówka: użyć prawa 0-1 Kołmogorowa.

Zadanie rekreacyjne

Zad. 11 Przeliczalny zbiór krasnoludków zostały ponumerowany, ustawiony w rząd zgodnie z tą numeracją i ubrany w czapeczki dwóch kolorów. Każdy krasnoludek widzi jedynie towarzyszy, którzy stoją przed nim (Zerowy widzi wszystkich oprócz siebie, Pierwszy wszystkich oprócz siebie i Zerowego itd.). Żaden nie wie, jakiego koloru nosi czapkę. Następnie każdy krasnoludek zostaje zapytany (po kolei, zgodnie z numeracją) o kolor swojej czapki. Od tego, czy odpowie trafnie, zależy jego życie. Jaką strategię powinny przygotować krasnale, aby uratować jak największą część swojej grupy? Ilu krasnali da się uratować? Co, jeśli wszystkie krasnoludki musiałyby odpowiedzieć na raz?

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`