Zastosowania kombinatoryki nieskończonej **lista 2** 2014

Dualizm Stone'a i $\beta\omega$.

Ćw. 1 Przekonaj się, że $\mathrm{St}(P(\omega)/\mathrm{Fin}) = \beta\omega \setminus \omega$.

Ćw. 2 Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą zbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni zwartej zerowymiarowej K. Przekonaj się, że $\mathrm{St}(\mathfrak{A})$ jest homeomorficzna z K. Podobnie - algebra zbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni Stone'a algebry $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{A}$.

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest podalgebrą Boole'a algebry $\mathfrak{B}$, to $\mathrm{St}(\mathfrak{A})$ jest obrazem ciągłym $\mathrm{St}(\mathfrak{B})$. Z kolei, jeżeli $\mathfrak{A}$ jest obrazem homomorficznym $\mathfrak{B}$, to $\mathrm{St}(\mathfrak{A})$ jest podprzestrzenią $\mathrm{St}(\mathfrak{B})$.

Zad. 4 Rozważmy rodzinę $\mathcal{C} \subseteq P(\omega)$ spełniającą warunek $W(n)$: "dla każdej n-partycji ω rodzina $\mathcal{C}$ zawiera dokładnie jeden element". Dla jakich n warunek $W(n)$ jest równoważny warunkowi "$\mathcal{C}$ jest ultrafiltrem"? Uwaga: nie zakładamy tu, że $\mathcal{C}$ jest filtrem.

Zad. 5 Pokaż, że $\beta\omega$ nie zawiera nietrywialnych ciągów zbieżnych. (Ciąg zbieżny $(x_n)_n$ jest trywialny, jeżeli istnieje liczba naturalna N taka, że $x_n = x$ dla $n > N$.)

Zad. 6 Przekonaj się, że jeżeli $x \in \beta\omega$ jest P-ultrafiltrem, a $y \in \beta\omega$ nie, to nie istnieje autohomeomorfizm $\beta\omega$ przerzucający x na y.

Zad. 7 Rozważ przestrzeń Stone'a podalgebry $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ generowanej przez

- $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, gdzie $T_\alpha \subseteq^* T_\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > \beta$.
- rodzinę niezależną mocy $\mathfrak{c}$.
- lukę Hausdorffa (czyli ω_1-lukę).
- filtr zbiorów gęstości 1.

(Formalnie rozważamy tu oczywiście nie literalnie powyższe rodziny, tylko odpowiadające im rodziny w $P(\omega)/\mathrm{Fin}$.) Jakie własności topologiczne mają te przestrzenie? Czy potrafisz wskazać naturalne przykłady przestrzeni homeomorficznych z powyższymi? Rozważ swoją ulubioną podalgebrę $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ i zbadaj własności jej przestrzeni Stone'a.

Niech X będzie przestrzenią zwartą, $\mathcal{F}$ filtrem na $P(\omega)$ a $(x_n)_n$ ciągiem w X. Powiemy, że $g \in X$ jest granicą $(x_n)_n$ *po filtrze* $\mathcal{F}$ ($\lim_{n\to\mathcal{F}}$), jeżeli dla każdego otoczenia $g \in U$ zbiór $\{n \colon x_n \in U\} \in \mathcal{F}$.

Zad. 8 Przekonaj się, że $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ dokładnie wtedy, gdy $\lim_{n\to\mathcal{F}} x_n = g$, gdzie $\mathcal{F}$ jest filtrem zbiorów ko-skończonych. Co to znaczy, że $\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = g$, jeżeli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem głównym?

Zad. 9 Pokaż, że jeżeli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem, to $\lim_{n\to\mathcal{U}}$ istnieje.

Zad. 10 Pokaż, że każda funkcja ograniczona $f\colon \omega \to \mathbb{R}$ ma przedłużenie ciągłe do funkcji $f'\colon \beta\omega \to \mathbb{R}$.

Zad. 11 Udowodnij, że $\beta\omega\setminus\omega$ ma własność: każdy niepusty zbiór typu G_δ ma niepuste wnętrze.

Zad. 12 Udowodnij, że $\beta\omega\setminus\omega$ ma własność: rozłączne zbiory typu F_σ mają rozłączne domknięcia.

Zadanie rekreacyjne.

Zad. 13 Czy $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ jest izomorficzna z $P(\omega_1)/\mathrm{Fin}$?

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`