Zastosowania kombinatoryki nieskończonej lista 3 2014

Twierdzenia Parowiczenki, F-przestrzenie i uzwarcenia Czecha-Stone'a.

Zad. 1 Pokaż, że $\beta[0,\omega_1) = [0,\omega_1]$ ($[0,\omega_1]$ rozpatrujemy z topologią porządkową).

Zad. 2 X jest ekstremalnie niespójna, jeżeli domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte. Pokaż, że przestrzeń zwarta zerowymiarowa X jest ekstremalnie niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy algebra Boole'a $\mathrm{Clop}(X)$ jest zupełna. Pokaż, że przestrzenie ekstremalnie niespójne są F-przestrzeniami.

Zad. 3 Pokaż, że βX jest wyznaczona jednoznacznie (dla każdej przestrzeni całkowicie regularnej X).

Zad. 4 Pokaż, że w przestrzeni normalnej zbiór jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest domkniętą G_δ.

Zad. 5 Pokaż, że w przestrzeni zwartej każde dwa rozłączne zbiory zerowe da się oddzielić zbiorem otwarto-domkniętym.

Zad. 6 Udowodnij, że jeśli przestrzeń zerowymiarowa zwarta X jest F-przestrzenią, to algebra $\mathrm{Clop}(X)$ nie ma przeliczalnych luk.

Zad. 7 Pokaż, że każda ośrodkowa przestrzeń zwarta jest ciągłym obrazem $\beta\omega$.

Zad. 8 Pokaż, że przestrzeń całkowicie regularna jest F-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa zbiory co-zerowe i rozłączne są funkcyjnie rozdzielone.

Zad. 9 Pokaż, że $C(\beta\omega)$ (czyli przestrzeń funkcji ciągłych na $\beta\omega$ z normą supremum) jest izometryczna z ℓ_∞ (przestrzeń ciągów ograniczonych z normą supremum). Podobnie: $C(\beta\omega)$ jest izometryczna z ℓ_∞/c_0 (c_0 jest przestrzenią ciągów zbieżnych do 0 z normą supremum).

Zagadnienia pod rozwagę przy założeniu negacji CH. (Trzeba je tylko *spróbować* rozwiązać.

Zad. 10 Czy istnieje ω_1-wieża w $P(\omega)/\mathrm{Fin}$? (Tzn. rodzina $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ taka, że $\alpha < \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_\beta \subseteq^* T_\alpha$ i nie istnieje nieskończony $T \subseteq \omega$ taki, że $T \subseteq T_\alpha$ dla każdego $\alpha < \omega_1$.)

Zad. 11 Czy istnieje maksymalna rodzina prawie rozłączna mocy ω_1?

Zad. 12 Czy istnieje rodzina funkcji $(f_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ taka, że $f_\alpha\colon \omega \to \omega$ i $f_\alpha <^* f_\beta$ dla każdego $\alpha < \beta$. ($f <^* g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) < g(n)$ dla każdego $n > N$ (dla pewnego N).

Zadanie rekreacyjne.

Zad. 13 Zaproponuj kandydata na algebrę Boole'a mocy $\leq \mathfrak{c}$, która w pewnym modelu teorii mnogości nie jest zanurzalna w $P(\omega)/\mathrm{Fin}$.

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`