

Wstęp do topologii A, LISTA NR 1 na ćwiczenia 20.X.07

Zad. 1 Dla $x, y \in \mathbb{R}$ niech

- $d_0(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$;
- $d_1(x, y) = \max\{1, |x - y|\}$;
- $d_2(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Które z powyższych funkcji są metrykami na $\mathbb{R}$? Znaleźć zbiory

- a) $\{x \in \mathbb{R} : d(x, 2) < 0, 1\}$,
- b) $\{x \in \mathbb{R} : d(1, x) < 4\}$

wstawiając za d odpowiednio d_E (metrykę euklidesową), d_0 , d_1 , d_2 . Znaleźć inne (od powyższych) metryki na $\mathbb{R}$.

Zad. 2 Znaleźć odległość poniższych punktów w metryce euklidesowej, metryce *miasto*, *rzeka* i *centrum* na $\mathbb{R}^2$.

- a) $A(2, 1)$, $B(3, 3)$;
- b) $A(2, 1)$, $B(2, 1.001)$.

Zad. 3 Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Średnicą zbioru $A \subseteq X$ nazywamy $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$. Jaka jest średnica kwadratu o boku 1 w metryce euklidesowej na płaszczyźnie? A w metryce *miasto*, *rzeka*? Jaka jest średnica zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ w metryce d , jeśli

- d jest metryką euklidesową a $A = K_{rzeka}((0, 1), 2)$;
- d jest metryką *centrum* a $A = K_e((0, 0), 2)$;
- d jest metryką *miasto* a $A = K_e((0, 0), 2)$.

Czy istnieje metryka na $\mathbb{R}^2$, w której każdy podzbiór $\mathbb{R}^2$ ma średnicę nie większą niż 1?

Zad. 4 Niech $f, g \in C[0, 1]$. Metrykę *supremum* na $C[0, 1]$ definiujemy wzorem

$$d_{sup}(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Znaleźć $d_{sup}(f, g)$, jeśli

- $f(x) = 0, 4x + 2, g(x) = 2x$;
- $f(x) = x^2 + 3x - 1, g(x) = x + 1$.

Zad. 5 Zapisać wzorem metrykę *centrum* i metrykę *rzeka* na $\mathbb{R}^2$.

Zad. 6 Zapisać wzorem metrykę euklidesową w $\mathbb{R}^4$. Jaka będzie odległość (w tej metryce) punktów $(0, 2, 3, 1)$ i $(1, 5, 3, 0)$? Znaleźć 5 punktów spełniających warunek $d_E(x, (2, 2, 3, 5)) = 1$. Znaleźć 5 punktów spełniających nierówność $d_E(x, (2, 2, 3, 5)) < 0, 1$.

Zad. 7 Niech $A = K \cup (\{0\} \times [0, 2])$, gdzie K jest kołem o promieniu 1. Zbadać, jakie jest wnętrze A w metryce euklidesowej i w metryce *rzeka*.

Literatura:

- *Wstęp do topologii* A P. Krupski - skrypt dostępny na stronie <http://www.math.uni.wroc.pl/instytut/skrypty.php>;
- *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Kazimierz Kuratowski;
- *Zarys topologii ogólnej* Ryszard Engelking;
- <http://pl.wikipedia.org/wiki/Kategoria:Topologia>.

Listy zadań i (być może) część notatek do wykładu będzie dostępna na stronie <http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/>.

Piotr Borodulin-Nadzieja, [pborod -at- math.uni.wroc.pl](mailto:pborod@math.uni.wroc.pl)