

Wstęp do topologii, LISTA NR 2 na ćwiczenia 3.XI.07

Zad. 1 Podać przykłady zbiorów otwartych, domkniętych, gęstych i brzegowych w poniższych przestrzeniach metrycznych:

- $(\mathbb{R}, d_E), (\mathbb{R}^2, d_E),$
- $(\mathbb{R}, d_{rzeka}),$
- $(\mathbb{R}, d_{dyskretna}),$
- $(C[0, 1], d_{sup}).$

Zad. 2 Kiedy

- zbiór otwarty jest brzegowy? A gęsty?
- zbiór gęsty jest brzegowy?
- zbiór domknięty jest gęsty? A brzegowy?

Zad. 3 Które z poniższych wzorów nie są prawdziwe i dlaczego? Dowieść wybranych dwóch równości spośród poniższych (wskazówka: lepiej wybrać prawdziwe :).

- $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B);$
- $Int(A) \setminus Int(B) = Int(A \setminus B);$
- $Int(A) \cup Int(B) = Int(A \cup B);$
- $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B};$
- $Bd(A) \cap Bd(B) = Bd(A \cap B);$
- $Bd(A) \cup Bd(B) = Bd(A \cup B);$
- $Int(\overline{A}) = \overline{Int A};$
- $\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A \setminus B}.$

Zad. 4 Pokazać, że rodzina zbiorów domkniętych w każdej przestrzeni metrycznej jest zamknięta na przekroje i skończone sumy. Nie korzystać z faktu, że zbiory domknięte są dopełnieniami zbiorów otwartych.

Zad. 5 Podać wnętrze, domknięcie i brzeg poniższych zbiorów w przestrzeni (X, d) . Jakie są ich własności topologiczne?

- $\{(x, y) : y = 2x + 1\}, \mathbb{N} \times \{0\}, \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),$ jeśli $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_E),$
- $\{(x, y) : y = 2x + 1\},$ jeśli $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_{dyskretna}),$
- $\{f : f(1/2) = 5\}, \{f : 5 < f(1/2) < 6\}$ $f : f$ jest postaci $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ jeśli $(X, d) = (C[0, 1], d_{sup})$

Zad. 6 Kiedy brzeg zbioru jest pusty?

Zad. 7 Czy zbiór otwarty, nie będący całą przestrzenią, może być gęsty w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_E)$?

Zad. 8 Czy zbiór przeliczalny w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_E)$ może nie być brzegowy? A w innych przestrzeniach?

Piotr Borodulin-Nadzieja