Wstęp do topologii, LISTA NR 4 na ćwiczenia 1.XII.07

Zad. 1 Pokaż, że dla każdej funkcji $f\colon X \to Y$ i każdych zbiorów $A_1, A_2 \subseteq Y$ zachodzi równość i zależności:

- $(f^{-1}[A_1])^c = f^{-1}[A_1^c]$;
- jeśli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, to $f^{-1}[A_1] \cap f^{-1}[A_2] = \emptyset$;
- jeśli $A_1 \cup A_2 = Y$, to $f^{-1}[A_1] \cup f^{-1}[A_2] = X$.

Zad. 2 Pokaż, że jeśli $f\colon X \to Y$ jest funkcją ciągłą i $A \subseteq Y$ jest domknięty (w Y), to $f^{-1}[A]$ jest domknięty (w X). (Wskazówka: wykorzystać poprzednie zadanie.)

Zad. 3 Pokaż, że jeśli przestrzeń A jest homeomorficzna z B, a ta znowuż jest homeomorficzna z C, to A jest homeomorficzna z C.

Uwaga. W poniższych zadaniach rozważamy jedynie metryki euklidesowe, o ile nie zostanie zaznaczone, że jest inaczej.

Zad. 4 Opisz wszystkie podzbiory spójne $\mathbb{R}$.

Zad. 5 Podaj przykład zbioru otwartego o 13 składowych.

Zad. 6 Uzupełnij zdanie: *suma dwóch zbiorów spójnych jest spójna, jeśli ...*

Zad. 7 Czy przekrój dwóch zbiorów spójnych musi być spójny?

Zad. 8 Uzupełnij zdanie: $\mathbb{Q}$ *nie jest spójny, bo* $\mathbb{Q} = \ldots \cup \ldots$.

Zad. 9 Uzupełnij zdanie: $A = [0,1] \cup \{1 + \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ *nie jest spójny, bo* $A = \ldots \cup \ldots$.

Zad. 10 Które z poniższych zbiorów są, a które nie są spójne? W przypadku niespójnych postaraj się wypisać składowe spójności.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\colon x = y\}$
- $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 13\}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

Zad. 11 Ile punktów potrzeba do rozspojenia brzegu kwadratu w $\mathbb{R}^2$? A samego $\mathbb{R}^2$? A sfery w $\mathbb{R}^3$? Podaj przykładu podzbioru $\mathbb{R}^2$, którego można rozspoić usuwając 4 punkty, ale nie 3.

Zad. 12 Wypisać wszystkie litery alfabetu (w możliwie nieskomplikowanym kroju) i zbadać, które z nich są ze sobą homeomorficzne. Wykorzystać twierdzenie o punktach rozspajania.

Zad. 13 Zbadaj, czy A i B są homeomorficzne, jeśli

(a) $A = [0,1]$, a $B = (0,1)$

(a) $A = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$, a $B = [0,1] \times \{0\}$;

(b) $A = \mathbb{R} \times \{0\}$, a $B = \{(x, x^2)\colon x \in \mathbb{R}\}$;

(c) $A = [0,1] \cup (3, \infty)$, a $B = [-7, -6] \cup (1,2)$;

Zad. 14 Rozważmy $(\mathbb{R}, d_{dyskretna})$. Opisać podzbiory spójne tej przestrzeni.

Zad. 15 Udowodnij, że podzbiór przeliczalny (niejednoelementowy) prostej nie jest zbiorem spójnym.

Pbn, `pborod@math.uni.wroc.pl`