

Zad. 1 Podaj parę przykładów zbiorów, które

- są spójne i zwarte;
- są spójne i nie są zwarte;
- mają nieskończenie wiele składowych spójności i są zwarte.

Zad. 2 Uzupełnij zdanie: *Zbiór $\mathbb{Q}$ nie jest zwarty, bo ciąg $a_n = \dots$ nie ma podciągu zbieżnego.* W podobny sposób wykaż brak zwartości zbiorów $(0, 1]$, $\{(x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$.

Zad. 3 Zbadaj podzbiory zwarte przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką centrum, miasto, rzeka.

Zad. 4 Zbadaj zwartość poniższych zbiorów:

- $[1, 3] \setminus \mathbb{Q}$, $[1, 3] \times (2, 4]$, $\{(x, y) : x \leq 4\}$

Zad. 5 Podaj przykład paru podzbiorów zwartych przestrzeni $C[0, 1]$ z metryką supremum. Podaj przykład jakiegoś podzbiorku tej przestrzeni, który nie jest zwarty.

Zad. 6 Czy przekrój zbiorów zwartych musi być zwarty? A suma?

Zad. 7 Dla $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definiujemy średnicę $diam(A) = \sup\{d_E(x, y) : x, y \in A\}$. Pokaż, że każdy zbiór zwarty K ma skończoną średnicę d i istnieją punkty $x, y \in K$ takie, że $d_E(x, y) = d$. Oblicz średnice paru “porządných” podzbiorów $\mathbb{R}^2$ (trójkątów, czworokątów, wielokątów).

Zad. 8 Czy to prawda, że jeśli istnieją $x, y \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ takie, że $d_E(x, y) = diam(A)$, to A jest zwarty?

Pokryciem zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ odcinkami otwartymi nazywamy taką rodzinę odcinków otwartych $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$, że $A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)$.

Zad. 9 Podaj przykład pokrycia zbioru $[0, 1] \cup [2, 3]$. Podaj przykład nieskończonego pokrycia tego zbioru.

Zad. 10 Pokaż, że zbiór $(0, 1)$ ma takie pokrycie odcinkami otwartymi, które jest nieskończone i, z którego nie da się wybrać skończonej podrodziny, która dalej pokrywałaby zbiór $(0, 1)$.

Zad. 11 Pokaż, że jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty to, z każdego pokrycia A odcinkami otwartymi możemy wybrać skończoną rodzinę, która dalej pokrywa A . (Wskazówka: załóż nie wprost, że “złe” pokrycie istnieje i spróbuj zdefiniować za jego pomocą ciąg, z którego nie da się wybrać podciągu zbieżnego).

Zad. 12 Przypomnij definicję funkcji jednostajnie ciągłej na $\mathbb{R}$. Podaj przykład funkcji ciągłej, która nie jest jednostajnie ciągła. Czy istnieje taka funkcja określona na $(0, 1)$?

Zad. 13 Pokaż, że jeśli f jest funkcją ciągłą określoną na zbiorze zwartym A , to jest ona jednostajnie ciągła. (Wskazówka: ustal ϵ . Wybierz dla tego ϵ pewne pokrycie zbioru A za pomocą definicji ciągłości; następnie skorzystaj z tego, że z tego pokrycia można wybrać podrodzinę, która nadal pokrywa A i wskaż δ , która świadczy o jednostajnej ciągłości).

Pbn, pborod@math.uni.wroc.pl