

Zad. 1 Podaj odległość funkcji f i g w metryce supremum i metryce całkowej, jeśli

- $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$;
- $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = \sin(4x)$.

Zad. 2 Jakie jest domknięcie zbioru $A \subseteq C[0, 1]$ w metryce supremum, jeśli

- A jest rodziną funkcji stałych;
- A jest rodziną funkcji ściśle rosnących;
- A jest rodziną funkcji przyjmujących wartości w przedziale $[3, 6)$.

Zad. 3 Jakie jest wnętrze zbioru $A \subseteq C[0, 1]$ w metryce supremum, jeśli

- A jest rodziną funkcji stałych;
- A jest rodziną funkcji przyjmujących wartości w przedziale $(0, 1)$.

Zad. 4 Podaj przykład ciągu funkcji z $C[0, 1]$, który

- jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie;
- jest zbieżny w metryce całkowej, ale nie jednostajnie;
- jest zbieżny w metryce całkowej, ale nie punktowo;
- jest zbieżny punktowo, ale nie w metryce całkowej.

Wykaż, że te przykłady w istocie pokazują to, co mają pokazać.

Zad. 5 Zbadaj zbieżność poniższego ciągu w metryce supremum (wskazówka: najpierw należy znaleźć (o ile istnieje) granicę punktową wskazanych ciągów)

- $f_n(x) = x^n$;
- $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$;
- $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$;
- $f_n(x) = e^{x/n}$.

Zad. 6 Znajdź zastosowania twierdzenia o przyjmowaniu kresów.

Zad. 7 Oto jedno z nich. Wykaż, że każdą funkcję ciągłą z $[0, 1] \cup [2, 3]$ można przedłużyć do funkcji ciągłej na $[0, 3]$. Pokaż, że zwartość $[0, 1] \cup [2, 3]$ jest istotna (np. pokaż, że nie każdą funkcję ciągłą z $[0, 1] \cup [2, 3]$ można przedłużyć do funkcji ciągłej na $[0, 1]$).

Zad. 8 Wskaż przykład funkcji ograniczonej z $C(0, 1]$, której nie da się przedłużyć do funkcji z $C[0, 1]$.

Zad. 9 Pokaż, że każda funkcja ciągła na $[0, 1] \cup [2, 3]$ może być jednostajnie przybliżana wielomianami (czyli twierdzenie Stone'a-Weierstrassa zachodzi również dla $[0, 1] \cup [2, 3]$). Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania i faktu, że twierdzenie Stone'a-Weierstrassa zachodzi również dla $[0, 3]$ (dlaczego?).

Zad. 10 Uogólnij twierdzenie o wpisywaniu krowy w kwadrat. Wskazówka: rozważ inne zwierzęta hodowlane.

Pbn, pborod@math.uni.wroc.pl