

WYKŁAD 1. METRYKI

- Mierzenie odległości na płaszczyźnie - “metryka euklidesowa”, przykład miejski.
- Wyprowadzenie naturalnych cech odległości -> definicja metryki.
- Definicja metryki i przestrzeni metrycznej. Przykłady: euklidesowa na $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, metryka miasto, centrum, rzeka.
- Przykład: metryka supremum na $C[0, 1]$, metryka dyskretna.
- Definicja kuli. Przykłady.
- Definicje: punkt wewnętrzny zbioru, wnętrze zbioru, zbiór otwarty, topologia. Przykłady.
- Podstawowe fakty o zbiorach otwartych: zamknięcie na dowolne sumy, na skończone przekroje.

WYKŁAD 2. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI TOPOLOGICZNE ZBIORÓW

- Fakt: zbiory otwarte są sumami kul.
- Definicja: ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej, domknięcie, zbiór domknięty. Przykłady.
- Podstawowe fakty o zbiorach domkniętych: zbiory domknięte są dopełnieniami zbiorów otwartych & konsekwencje.
- Definicja brzegu. Przykłady.
- Dalsze związki między wnętrzem, domknięciem a brzegiem zbiorów.
- Definicja zbioru gęstego. Fakt: zbiory gęste to te, które kroją się niepusto z każdym niepustym zbiorem otwartym. Przykłady.
- Definicja zbioru brzegowego. Przykłady.

WYKŁAD 3. FUNKCJE CIĄGŁE, HOMEOMORFIZMY

- Podprzestrzenie - definicja, przykłady. Postać zbiorów otwartych i domkniętych w podprzestrzeniach.
- Równoważność metryk - definicja, równoważne sformułowania i przykłady.
- Przestrzenie **metryczne** a przestrzenie **topologiczne**.
- Sposoby wykazywania równoważności metryk.

- Funkcja ciągła - wg Cauchy'ego, Heinego. Równoważne sformułowanie topologiczne. Przykłady.
- Homeomorfizm. Przykłady homeomorfizmów. Homeomorfizm kwadratu i okręgu na płaszczyźnie euklidesowej.
- Intuicje związane z homeomorfizmami.

WYKŁAD 4. SPÓJNOŚĆ

- Spójność - definicja.
- Twierdzenie o spójności odcinka $(0, 1)$.
- Intuicje związane z pojęciem spójności.
- Twierdzenie o zachowywaniu spójności przez funkcje ciągłe.
- Składowe spójności, punkty rozspajania, stopnie punktów rozspajania. Twierdzenia o zachowywaniu powyższych.
- Twierdzenie o wartości pośredniej (Darboux).

WYKŁAD 5. ZWARTOŚĆ

- Zwartość - definicja
- Twierdzenie o zwartości odcinka $[0, 1]$.
- Charakteryzacja podzbiorów zwartych przestrzeni euklidesowych.
- Twierdzenie o zachowywaniu zwartości przez funkcje ciągłe.
- Twierdzenie o przyjmowaniu kresów.

WYKŁAD 6. TOPOLOGIA A (NIEKTÓRE) TWIERDZENIA ANALIZY

- Przestrzeń $C(X)$, metryka supremum, całkowita, zbieżność punktowa, jednostajna, w metryce całkowitej - implikacje, przykłady, kontrprzykłady.
- Topologiczne własności $C(X)$.
- Twierdzenie: każda funkcja z $C(X)$ jest jednostajnie ciągła, o ile X jest zwarty.
- Twierdzenie o wartości pośredniej (Darboux) - różne sformułowania i konsekwencje.
- Twierdzenie o przyjmowaniu kresów.
- Twierdzenie o jednostajnym przybliżaniu funkcji ciągłych przez wielomiany (Weierstrassa).