

Imię, nazwisko

1	2	3	Σ
16	16	16	48

EGZAMIN POPRAWKOWY 13 II 2009

Zad. 1 (4) Podaj definicję metryki dyskretnej na $\mathbb{N}$. Czy przestrzeń metryczna $\mathbb{N}$ z tą metryką jest zwarta? Zupełna? Ośrodkowa?

Zad. 2 (4) Czy poniższe ciągi są zbieżne w podanych przestrzeniach?

- $1/n$ w $(0, 1)$ z metryką euklidesową;
- $(1/n, 1/n)$ w $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową;
- $(1/n, 1)$ w $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka;
- $f_n(x) = x^n$ w $C[0, 1]$ z metryką supremum.

Zad. 3 (3) Czy istnieje funkcja ciągła $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, która jest “na”?

Zad. 4 (5) Czy prawdziwe są poniższe zdania

- istnieje podzbiór $\mathbb{R}$, który jest gęsty i otwarty;
- istnieje przestrzeń metryczna, która nie jest ośrodkowa;
- przekrój dwóch podzbiorów zwartych $C[0, 1]$ jest zwarty;
- $C[0, \infty)$ jest zupełna.

Zad. 5 (4) Czy poniższe szeregi są (niemal) jednostajnie zbieżne na swoim obszarze zbieżności?

- $\sum \frac{x^n}{n}$;
- $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

Zad. 6 (4) Zdefiniuj poniższe pojęcia odnoszące się do $C[0, 1]$ (z metryką supremum). Które z którego wynika?

- jednostajna zbieżność;
- zbieżność;
- punktowa zbieżność;
- bezwzględna zbieżność.

Zad. 7 (4) Czy prawdziwe jest twierdzenie

- każda funkcja ciągła może być przybliżona wielomianami na przedziale $[7, 13]$;
- $\mathbb{R}^3$ jest przestrzenią Hilberta;
- w $C[0, 1]$ z metryką supremum zachodzi tw. Pitagorasa;
- każdy szereg funkcyjny bezwzględnie zbieżny na $[0, 1]$ jest niemal jednostajnie zbieżny?

Zad. 8 (4) Czy funkcja, będąca punktową granicą szeregu potęgowego, musi być ciągła na jego otwartym przedziale zbieżności? Podaj kontrprzykład lub wyjaśnij, dlaczego tak jest.

Zad. 9 (3) Podaj przykład podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ o mierze 3, którego domknięcie ma miarę 5, a wnętrze 1 (chodzi o miarę Lebesgue'a).

Zad. 10 (4) Pokaż, że jeśli funkcje (f_n) są borelowskie, to f zdefiniowana przez

$$f(x) = \inf_n f_n(x)$$

jest borelowska.

Zad. 11 (4) Oblicz $\int_{[0,1]} f d\lambda$, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zad. 12 (5) Pokaż, że jeśli $\lambda(A) = a < \infty$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $\lambda(A \cap K) > a - \varepsilon$.