

Imię, nazwisko

1	2	3	4	5	Σ
6	6	3	3	$3 + 3$	24

KOŁOKWIUM 1 7 XI 2008

Zad. 1 Znajdź wnętrze i domknięcie poniższych zbiorów w podanych przestrzeniach:

- a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^2$;
- b) $\{1/n: n \in \mathbb{N}\}$ w $\mathbb{R}$;
- c) $\{1/n: n \in \mathbb{N}\}$ w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zad. 2 Podaj przykład (o ile takowy istnieje)

- a) funkcji ciągłej nieograniczonej na zbiorze ograniczonym;
- b) otwartego i gęstego podzbioru $\mathbb{R}$;
- c) ciągu Cauchy'ego, który nie jest zbieżny;
- d) zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że $\text{Int}(BdA) \neq \emptyset$;
- e) dwóch różnych przestrzeni, pomiędzy którymi istnieje homeomorfizm;
- f) przestrzeni zupełnej, która nie jest zwarta.

Zad. 3 Pokaż, że jeśli A jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$, to ma największy i najmniejszy element.

Zad. 4 Niech z będzie ustalonym punktem przestrzeni metrycznej (X, d) . Czy funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = d(x, z)$ jest ciągła?

Zad. 5 Na przestrzeni ciągów zerojedynkowych $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ zdefiniujmy następującą funkcję

$$d(x, y) = 1/n, \quad \text{gdzie } n = \min\{k: x_k \neq y_k\},$$

przy czym $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ a $d(x, y) = 0$, jeżeli $x = y$. Sprawdź, czy ta funkcja jest metryką. Czy ta przestrzeń metryczna jest zwarta?