

Imię, nazwisko

1	2	3	4	Σ
8	4	4	8	24

KOŁOKWIUM 3 23 XII 2008

Zad. 1 Czy istnieje

- a) zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $\mathbb{Q} \subseteq U$ i $\lambda(U) < \infty$?
 - b) podzbiór borelowski $\mathbb{R}$, który nie jest ani otwarty ani domknięty?
 - c) funkcja f niecałkowalna w sensie Riemanna, taka że $\int f \, d\lambda = 0$?
 - d) funkcja prosta, która nie jest całkowalna?
 - e) funkcja ciągła, która nie jest borelowska?
 - f) miara μ określona na podzbiorach borelowskich $\mathbb{R}$ taka, że $\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu = 0$
-
- g) Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, a $A \subseteq \mathbb{R}$. Jak (formalnie) należy rozumieć zdanie

$$f \in A \quad \mu\text{-prawie wszędzie?}$$

- h) Napisz przestrzeń miarową związaną z jednorazowym rzutem dwustronną monetą.

Zad. 2 Pokaż, że jeśli $f = 0$ μ -prawie wszędzie, to $\int f \, d\mu = 0$.

Zad. 3 Czy istnieje funkcja borelowska $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, taka że $|f|$ nie jest borelowska?

Zad. 4 Oblicz całki Lebesgue'a

$$\int_{[3,5]} 1/x \, d\lambda$$

$$\int_{\mathbb{Q}} e^x \, d\lambda$$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda,$$

gdzie $f(x) = \sum_n 2^n \chi_{A_n}$ przy czym

$$A_n = (n, n + \frac{1}{4^n}).$$