

Zad. 1 Pokaż, że rodzina przedziałów domkniętych generuje rodzinę podzbiorów borelowskich prostej. Pokaż, że rodzina półprostych postaci $[a, \infty)$, gdzie $a \in \mathbb{Q}$, ma tę samą własność. Wskaż sympatyczne rodziny zbiorów generujące zbiory borelowskie na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej.

Zad. 2 Zapisz zbiór $[0, 1)$ jako przeliczalny przekrój zbiorów otwartych i jako przeliczalną sumę zbiorów domkniętych. Pokaż, że $\lambda([0, 1)) = 1$.

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń miarową (X, Σ, μ) . Niech A i B będą elementami Σ . Czy prawdą jest, że

- a) $\mu(A) \leq \mu(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$;
- b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;
- c) $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B \cap C)$;
- d) $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Zad. 4 Czy poniższe przestrzenie miarowe są poprawnie zdefiniowane?

- a) $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N})$, $\mu(M) = \sum_{n \in M} 2^{-n}$;
- b) $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N})$, $\mu(M) = |M|$;
- c) $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = P(\mathbb{R})$, $\mu(R) = 0$, gdy R przeliczalny, $\mu(R) = 1$ w przeciwnym wypadku;
- d) $X = \mathbb{R}$, Σ - σ -ciało generowane przez (wszystkie) zbiory jednoelementowe, $\mu(E) = 0$, gdy E - przeliczalny, $\mu(E) = 1$, gdy E - co-przeliczalny;
- e) $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = P(\mathbb{R})$, $\mu(R) = |R \cap \{0, 1\}|$.

Zad. 5 Zapisz przestrzeń probabilistyczną opisującą losowanie dwóch kart z talii.

Zad. 6 Zapisz przestrzeń probabilistyczną opisującą losowanie dwóch punktów z przedziału $[0, 1]$. Narysuj na płaszczyźnie zbiór, którego pole odpowiada prawdopodobieństwu, że pierwszy punkt będzie mniejszy (trzy razy mniejszy) od drugiego. Narysuj zbiór, którego pole równa się prawdopodobieństwu, że suma wylosowanych punktów równa się 1. Oblicz te prawdopodobieństwa.

Zad. 7 Znajdź podzbiór prostej miary (Lebesgue'a) 1, którego wnętrze ma miarę 0, a domknięcie 2.

Zad. 8 Wyjaśnij, co to znaczy, że miara Lebesgue'a jest niezmiennicza na przesunięcia i dlaczego tak jest. Podaj przykład miary, która nie spełnia tej własności.

Zad. 9 Pokaż, że jeśli $\lambda(A) = a < \infty$, to dla każdego ε istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $\lambda(A \cap K) > a - \varepsilon$.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>