

Jest to lista dodatkowa, mająca służyć przygotowaniu do kolokwium z miary i całki Lebesgue'a. Wśród poniższych pytań mogą znaleźć się takie, które wymagają doprecyzowania (należy je wtedy doprecyzować). Niektóre są bardzo łatwe, są także pytania trudniejsze. Niektóre z poniższych pytań pojawią się na kolokwium.

Przy rozwiązywaniu trzeba dbać o ścisłość rozumowań i podawać precyzyjne przykłady i kontrprzykłady.

Przy nauce do kolokwium nie należy oczywiście zapominać o zadaniach z list 10 i 11...

Zad. 1 Podaj przykład zbioru A , który ma miarę $\lambda(A) = 2$ oraz

- a) jest nieograniczony;
- b) nie zawiera żadnego przedziału;
- c) nie zawiera żadnego przedziału, choć jest otwarty;
- d) nie zawiera żadnego przedziału, choć jest domknięty.

Zad. 2 Podaj przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest

- a) borelowska i nieciągła (w żadnym punkcie);
- b) nieborelowska i ciągła;
- c) borelowska i ciągła;
- d) nieborelowska i nieciągła.

Zad. 3 Jaka jest różnica między poniższymi pojęciami:

- a) miarą a miarą Lebesgue'a;
- b) zbiorem borelowskim a zbiorem mierzalnym;
- c) funkcją borelowską a funkcją mierzalną;
- d) funkcją mierzalną a funkcją całkwalną?

Zad. 4 Pokaż, że funkcje proste są mierzalne.

Zad. 5 Zauważ, że daną funkcję prostą możemy zazwyczaj zapisać na wiele sposobów. Zapisz poniższą funkcję prostą w postaci $\sum a_n \chi_{A_n}$, gdzie (A_n) są parami rozłączne:

$$f(x) = 2\chi_{(0,4)}(x) + \chi_{(2,4)}(x) - 7\chi_{(1,3)}(x).$$

Zapisz w prostszy sposób następującą funkcję prostą:

$$f(x) = \chi_{(1,3)}(x) + \chi_{[3,4)}(x) + \chi_{[4,18)}(x).$$

Zad. 6 Znajdź błąd w następującym rozumowaniu: *Miara Lebesgue'a definiowana jest jako $\lambda(A) = \inf\{\sum b_n - a_n : A \subseteq \bigcup(a_n, b_n)\}$. Dla każdego podzbioru liczb rzeczywistych to infimum jest określone, więc każdy podzbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny.*

Zad. 7 Czy prawdą jest, że

- a) jeśli $|f|$ jest borelowska, to f jest borelowska;
- b) jeśli f jest borelowska i $|f|$ jest całkowalna, to f jest całkowalna;
- c) f^+ może nie być borelowska nawet, gdy f jest borelowska;
- d) przeciwobraz zbioru borelowskiego przez funkcję ciągłą jest borelowski;

Zad. 8 Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem borelowskim o mierze $\lambda(A) = a > 0$. Czy to prawda, że dla każdego $\varepsilon > 0$

- a) istnieje zbiór otwarty $A \subseteq U$ taki, że $\lambda(U) < a + \varepsilon$;
- b) istnieje zbiór domknięty $A \subseteq F$ taki, że $\lambda(F) < a + \varepsilon$;
- c) istnieje zbiór domknięty $F \subseteq A$ taki, że $\lambda(F) > a - \varepsilon$?

Zad. 9 Podaj przykład lub argument, że nie istnieje

- a) funkcja charakterystyczna, która nie jest mierzalna;
- b) funkcja prosta, która nie jest ograniczona;
- c) funkcja prosta, która nie jest całkowalna;
- d) funkcja prosta, która nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Zad. 10 Sprawdź czy poniższe rodziny generują zbiory borelowskie:

- a) $\{[p, q) : p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}$;
- b) $\{(a, b) \cap \mathbb{Q} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$;
- c) zbiory jednopunktowe;
- d) $\{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$.

Zad. 11 Czy poniższe rodziny podzbiorów $\mathbb{R}$ to σ -ciała?

- a) zbiory otwarte;
- b) zbiory przeliczalne i ko-przeliczalne;
- c) zbiory skończone i ko-skończone;
- d) wszystkie podzbiory poza jednym (dwoma, skończoną liczbą) ustalonym.

Czy odpowiedzi byłyby takie same, gdyby nie zakładać, że są to rodziny podzbiorów $\mathbb{R}$?

Zad. 12 Podaj parę przykładów σ -ciał i rodzin, które nie są σ -ciałami, na zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$. Jak wygląda σ -ciało podzbiorów płaszczyzny generowane przez trójkąty?

Zad. 13 Wyjaśnij, dlaczego definicje σ -ciała i rodziny zbiorów borelowskich wyglądają właśnie tak, a nie inaczej.

Zad. 14 Pokaż, że

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[-r, r]} f \, d\lambda.$$

Użyj przeliczalnej addytywności całki. Wyjaśnij, dlaczego nie ma sensu mówić o *niewłaściwej całce Lebesgue'a* (w przeciwieństwie do przypadku całki Riemanna).

Zad. 15 Pokaż, że $\int_A \chi_B \, d\mu = \mu(A \cap B)$.

Zad. 16 Rozważ przestrzeń miarową związaną z rzutem kostką (X, Σ, μ) . Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona przez $f(i) = i$.

- a) Czy f jest mierzalna?
- b) Ile wynosi całka $\int_X f \, d\mu$?

Zad. 17 Rozważ przestrzeń miarową (X, Σ, μ) związaną z losowaniem punktu z $\mathbb{R}$, przy czym prawdopodobieństwo wylosowania punktu zmienia się zgodnie z funkcją $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2}$.

- a) Sprecyzuj, co to znaczy, tzn. napisz odpowiednią przestrzeń miarową.
- b) Czy funkcja f jest borelowska?
- c) Zapisz prawdopodobieństwo, że wylosowany punkt znajdzie się w zbiorze A .

Przypuśćmy, że za wylosowanie punktu x dostajemy $g(x) = x^2$ złotych. Zapisz wartość oczekiwaną wygranej. Zapisz miarę, z jaką wiąże się ta zmienna losowa.

Zad. 18 Pokaż, że jeśli $f \geq 0$ i $f = 0$ μ -prawie wszędzie, to $\int f \, d\mu = 0$.

Zad. 19 Pokaż, że jeśli f_n zbiega μ -prawie wszędzie do f i dla każdego n funkcja $f_n \geq 0$ μ -prawie wszędzie, to $f \geq 0$ μ -prawie wszędzie.