

Zad. 1 Wykaż, że następujące warunki są równoważne dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) f jest borelowska;
- b) $\{x: f(x) \in (a, b)\}$ jest borelowski dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$;
- c) $\{x: f(x) > r\}$ jest borelowski dla każdego $r \in \mathbb{R}$;
- d) $\{x: f(x) < q\}$ jest borelowski dla każdego $q \in \mathbb{Q}$.

Zad. 2 Przekonaj się, że jeśli f i g są borelowskie, a $a \in \mathbb{R}$, to funkcje af , $a + f$ i $f \circ g$ są borelowskie.

Zad. 3 Pokaż, że jeśli funkcje (f_n) są borelowskie, to f zdefiniowana przez

$$f(x) = \sup_n f_n(x)$$

jest borelowska. Wskazówka: użyj poprzedniego zadania.

Zad. 4 Funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne (w sensie Lebesgue'a). Pokaż, że jeśli $f \leq g$, to $\int f \, d\lambda \leq \int g \, d\lambda$. (Wskazówka: najpierw załóż, że $f = 0$.) Jak można uogólnić warunek $f \leq g$?

Zad. 5 Pokaż, że

$$\int af + bg \, d\lambda = a \int f \, d\lambda + b \int g \, d\lambda,$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$, f i g borelowskich.

Zad. 6 Oblicz $\int f \, d\lambda$, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{w innym wypadku.} \end{cases}$$

Zad. 7 Pokaż, że

$$\int_{A \cup B} f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda,$$

jeśli $A \cap B = \emptyset$, a f - borelowska. Jak można uogólnić warunek $A \cap B = \emptyset$?

Zad. 8 Niech $\mu(A) = \int_A x \, d\lambda$. Oblicz $\mu(\mathbb{Q})$ i $\mu(0, 2)$. Czy miara ta jest niezmiennicza na przesunięcia? Jak zinterpretować taką miarę w kontekście prawdopodobieństwa? Oblicz

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,2)}(x) \, d\mu(x) \text{ oraz } \int_{[0,1]} x \, d\mu(x).$$

Zad. 9 Oblicz $\int f \, d\mu$, jeśli $f = x^2$, a μ jest zdefiniowana przez

$$\mu(A) = |A \cap \{1, 2\}|.$$

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>