

Przypomnienie. Powiemy, że $a \in \mathbb{R}$ jest **ograniczeniem górnym** zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeżeli A nie posiada elementu większego od a . Natomiast a jest **kresem górnym** zbioru A , jeżeli jest najmniejszym z ograniczeń górnych A (piszemy $a = \sup A$, przy czym $\sup A = \infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z góry). Definicje ograniczenia i kresu dolnego definiuje się analogicznie (kres dolny oznacza się przez $\inf$).

Zad. 1 Zdefiniuj ograniczenie dolne i kres dolny.

Zad. 2 Wykonaj poniższe polecenia posługując się ściśle definicjami kresów.

- a) zauważ, że jeżeli zbiór A ma największy element, to jest on jego kresem górnym;
- b) sprawdź, czy największy element zbioru A może być jego kresem dolnym;
- c) oblicz kresy zbiorów $(0, 1)$, $[0, 1]$;
- d) oblicz kresy zbiorów $\{1/n: n \in \mathbb{N}\}$, $\{k/n: k, n \in \mathbb{N}\}$, $\{k/n: n \in \mathbb{N}, 0 < k < n\}$;
- e) oblicz $\inf\{\sqrt[n]{2}: n \in \mathbb{N}\}$;
- f) wykaż, że $\inf A = \inf A \cap \mathbb{Q}$ dla $A = (-1, 1)$. Czy równość pozostanie prawdziwa dla każdego $A \subseteq \mathbb{R}$?
- g) pokaż, że $\sup\{f(x) + g(x): x \in A\} \leq \sup\{f(x): x \in A\} + \sup\{g(x): x \in A\}$ dla każdego niepustego A i dowolnych funkcji f i g działających w $\mathbb{R}$.

Przypomnienie. Ciąg liczb rzeczywistych zbiega do $a \in \mathbb{R}$, jeżeli w każdym przedziale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leżą **prawie wszystkie** wyrazy tego ciągu.

Zad. 3 Udowodnij z definicji, że $\lim \frac{n+1}{n^2-1} = 0$.

Zad. 4 Udowodnij, że suma dwóch zbieżnych ciągów jest zbieżna do sumy ich granic. Czy podobny fakt zachodzi dla iloczynu?

Zad. 5 Jaka jest relacja między $\lim a_n$ a $\sup\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$, jeśli (a_n) jest zbieżny i rosnący? A jeśli jest tylko zbieżny?

Zad. 6 Które z poniższych zdań o zbiorze pustym są prawdziwe?

- a) $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ ma element największy;
- b) $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ ma ograniczenie górne;
- c) dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $x \in \emptyset \subseteq \mathbb{R}$, to $x^2 = -1$;
- d) istnieje $x \in \emptyset$ taki, że $x^2 = -1$;
- e) $\emptyset \subseteq [0, 1]$.

Zad. 7 Zaproponuj definicję $\sup \emptyset$ i $\inf \emptyset$.

Pbn <http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>