

Zad. 1 Pokaż, że jeżeli $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem otwartych podzbiorów $\mathbb{R}^n$, to również zbiór $\bigcup U_n$ jest otwarty (w razie trudności, na początku spróbuj dowieść, że suma dwóch zbiorów otwartych jest otwarta).

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli zbiory $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ są otwarte, to $U_1 \cap U_2$ jest otwarty. Wywnioskuj, że przekrój skończenie wielu zbiorów otwartych jest otwarty.

Zad. 3 Wywnioskuj z poprzednich dwóch zadań analogiczne twierdzenia dla zbiorów domkniętych.

Zad. 4 Rozważ ciąg zbiorów $(-1/n, 1/n) \subseteq \mathbb{R}$, aby wykazać, że przekrój nieskończenie wielu zbiorów otwartych nie musi być otwarty. Podaj przykład świadczący, że suma nieskończenie wielu zbiorów domkniętych nie musi być domknięta.

Zad. 5 Odpowiedz na poniższe pytania (uzasadniając odpowiedź):

- a) czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\text{Int}(A) = \{1\}$?
- b) czy suma dwóch zbiorów gęstych musi być gęsta?
- c) czy suma dwóch zbiorów brzegowych musi być brzegowa?
- d) czy zbiór gęsty może być brzegowy?
- e) czy zbiór gęsty może być otwarty?
- f) czy zbiór brzegowy może być otwarty?
- g) czy zbiór gęsty może być zwarty?

Zad. 6 Zdefiniuj 3 rozłączne podzbiory gęste $\mathbb{R}$. Cztery...Pięc...Nieskończenie wiele...

Zad. 7 Znajdź wnętrza, domknięcia i brzegi poniższych podzbiorów $\mathbb{R}$:

$$\{0, 1, 2\} \quad \mathbb{N} \quad (0, 1) \cup (2, 3] \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \quad \mathbb{R} \setminus \{5\} \quad \{k + 1/n : n, k \in \mathbb{N}\}$$

Które z nich są otwarte, które domknięte, które gęste, które zwarte, a które brzegowe?

Zad. 8 Znajdź wnętrza, domknięcia i brzegi poniższych podzbiorów płaszczyzny:

$$\emptyset \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad \{(x, y) : x < y\} \quad [0, 1] \times (0, 1) \quad \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < 9\} \cup \{(3, 0), (0, 3)\} \quad \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$$

Które z nich są otwarte, które domknięte, które gęste, które zwarte, a które brzegowe?

Zad. 9 Zauważ, że podzbiory $\mathbb{R}^n$ postaci $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ są otwarte, a $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ są domknięte.

Zad. 10 Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu: *zbiór dwupunktowy* $A = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ nie jest domknięty. Rozważmy bowiem ciąg $0, 1, 0, 1, \dots$. Jest to ciąg elementów A i nie jest zbieżny, co przeczy definicji zbioru domkniętego.

Zad. 11 Pokaż, że ciąg punktów $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny do (x_1, x_2) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego pierwszych współrzędnych zbiega do x_1 , a drugich do x_2 . Jak uogólnić ten dowód na przestrzenie > 2 wymiarowe?

Zad. 12 Zbadaj zbieżność ciągu $x^n = (x_1^n, x_2^n)$ na płaszczyźnie, gdzie

a) $x^n = (1/n, n)$;

b) $x^n = ((1 + 1/n)^n, 1 + 1/n)$;

Zad. 13 Wywnioskuj z definicji ciągu zbieżnego w $\mathbb{R}^n$, że

a) ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę;

b) każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>