

Zad. 1 O zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$ wiemy, że dla każdych $x, y \in D$ takich, że $x < y$ istnieje $z \in D$ taki, że $x < z < y$. Jakie warunki musi jeszcze spełnić ten zbiór, jeśli chciałby zostać gęstym podzbiorem $\mathbb{R}$?

Zad. 2 Pokaż, że zbiory otwarte w przestrzeniach metrycznych są to sumy kul.

Zad. 3 Zapisz wzorem metrykę centrum i metrykę rzeka. Wykaż, że rzeczywiście są to metryki.

Zad. 4 Pokaż, że ciąg (x_n) z $\mathbb{R}^2$ jest zbieżny w metryce euklidesowej wtedy i tylko wtedy, kiedy jest zbieżny w metryce miasto (o takich metrykach mówi się, że są równoważne). Czy metryka centrum jest równoważna metryce rzeka?

Zad. 5 Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunki metryki na zbiorze X .

a) $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, $X = \mathbb{R}^2$;

b) $d(x, y) = \min(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, $X = \mathbb{R}^2$;

c) $d(n, m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, $X = \mathbb{N}^2$;

d) $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$, $X = C[0, 1]$;

e) $d(x, y) = \sum (1/2^n) |x_n - y_n|$, $X = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$

Zad. 6 Oblicz $d(f, g)$, jeśli $f, g \in C[0, 1]$, d jest metryką supremum i

a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$;

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$;

c) $f(x) = \sin(2\pi x)$, $g(x) = \sin(4\pi x)$.

Zad. 7 Wyznacz kulę $B(f, 1)$ w przestrzeni $C[0, 1]$ z metryką supremum, przy czym
a) $f(x) = 3$, b) $f(x) = \sin(x)$.

Zad. 8 Na wierzchołkach grafu (nieskierowanego) można zdefiniować metrykę w następujący sposób: dwa wierzchołki są od siebie odległe o n , jeżeli da się z jednego do drugiego dojść przechodząc przez n krawędzi (ale już nie $n - 1$). Sprawdź, że w istocie jest to metryka; zobacz, jak wyglądają w tej przestrzeni metrycznej kule, zbiory otwarte i zbiory domknięte.

Zad. 9 Czy $\mathbb{R}^2$ z metryką centrum jest przestrzenią ośrodkową? A $\mathbb{R}^2$ z metryką miasto?

Zad. 10 Kiedy przestrzeń X z metryką dyskretną jest ośrodkowa?

Zad. 11 Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w przestrzeni $[0, 1) \cup [2, 3]$ z metryką euklidesową? Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w $\mathbb{N}$ z metryką euklidesową? Czy są to przestrzenie zupełne?

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>