

Zad. 1 Pokaż, że jeśli ciąg w przestrzeni metrycznej (X, d) spełnia warunek $d(x_n, x_{n+1}) < 1/2^n$, to jest to ciąg Cauchy'ego. Czy potrafisz znaleźć ciąg w $\mathbb{R}$, który spełnia warunek $|x_n, x_{n+1}| \rightarrow 0$, a który nie jest zbieżny (a tym bardziej nie jest Cauchy'ego)?

Zad. 2 Które z poniższych przestrzeni metrycznych są zwarte? Które zupełne?

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 4\}$ z metryką euklidesową;
- b) $\{(x, x^2): x \in \mathbb{R}\}$ z metryką euklidesową;
- c) $\{1/n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ z metryką euklidesową;
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2, y = 2\}$ z metryką rzeka.

Zad. 3 Pokaż, że w przestrzeni zwartej każdy zbiór domknięty jest zwarty.

Zad. 4 Pokaż, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna. Wskazówka: *zmodyfikuj dowód faktu mówiącego, że przestrzeń euklidesowa jest zupełna.*

Definicja. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $x \in X$ i zbioru $A \subseteq X$ liczbę $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a): a \in A\}$ nazywamy odległością x od zbioru A .

Zad. 5 Pokaż że $\text{dist}(x, A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x należy do domknięcia zbioru A .

Zad. 6 Oblicz $\text{dist}(z, A)$ w przestrzeni X , jeśli

- a) $z = (4, 2)$, $A = \{(x, x^2): x \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}^2$;
- b) z jest funkcją $z(x) = x^2$, $A = \{ax: a \in \mathbb{R}\}$, $X = C[0, 1]$.

Zad. 7 Niech X będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, że jeśli zbiory $A, B \subseteq X$ są zwarte i rozłączne, to istnieje $r > 0$ taki, że $d(a, b) > r$ dla każdego $a \in A$ i $b \in B$. Wskazówka: *załóż nie wprost, że takiego r nie ma; wskaż taki ciąg, żeby z istnienia jego podciągu zbieżnego wynikała sprzeczność z rozłącznością A i B .*

Zad. 8 Wskaż na płaszczyźnie zbiory domknięte A, B , dla których nie istnieje r taki, jak w poprzednim zadaniu (tzn. taki, że $d(a, b) > r$ dla każdego $a \in A, b \in B$).

Zad. 9 Rozważ prostą z metryką euklidesową. Pokaż (nie korzystając z tw. Baire'a), że jeżeli $F_1 \cup F_2 = \mathbb{R}$ i zbiory F_1, F_2 są domknięte, to $\text{Int}(F_1) \neq \emptyset$ lub $\text{Int}(F_2) \neq \emptyset$.

Zad. 10 Czy prawdą jest, że w dowolnej przestrzeni metrycznej:

- a) dowolny zbiór jednoelementowy jest zwarty?
- b) suma dowolnych dwóch zbiorów zwartych jest zwarta?
- c) przekrój dowolnego zbioru zwartego z dowolnym zbiorem otwartym jest zwarty?
- d) domknięcie dowolnego zbioru zwartego jest zbiorem zwartym?

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>