

Zad. 1 Niech $f: X \rightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Które z poniższych własności musi posiadać f ? Które z nich pociągają za sobą ciągłość?

- a) przeciwobraz każdej kuli jest kulą;
- b) przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest kulą;
- c) przeciwobraz każdej kuli jest zbiorem otwartym;
- d) przeciwobraz każdego zbioru domkniętego jest domknięty;
- e) przeciwobraz każdego zbioru gęstego jest gęsty.

Zad. 2 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe. Pokaż, że af ($a \in \mathbb{R}$), $f + g$ i fg są funkcjami ciągłymi.

Zad. 3 Pokaż, że złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.

Zad. 4 Jak mają się do siebie poniższe twierdzenia:

- a) twierdzenie Weierstrassa (o przyjmowaniu kresów na dziedzinie zwartej);
- b) twierdzenie o zachowywaniu zwartości przez funkcje ciągłe.

Zad. 5 Które z poniższych funkcji są ciągłe?

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1$;
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (\sin(x_1), x_2^2)$;
- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$;
- d) $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, gdzie $X = \mathbb{R}^2$ z metryką dyskretną;
- e) funkcja odwrotna do powyższej.

Zad. 6 Czy istnieje funkcja ciągła z X na Y , jeśli

- a) $X = [0, 1)$, Y jest okręgiem o promieniu 1;
- b) Y jest okręgiem, $X = [0, 1]$;
- c) $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, x^2): x \in [0, 2]\}$;
- d) $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, x^2): x \in \mathbb{R}\}$;
- e) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$ z metryką rzeka;
- f) $X = [0, 1]$, Y jest okręgiem.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>