

Zad. 1 Czy przestrzeń $C[0, 1]$ jest zwarta?

Zad. 2 Zbadaj zbieżność jednostajną poniższych ciągów:

- a) $f_n = x^2/n$ na $\mathbb{R}$;
- b) $f_n = x^2/n$ na $[0, 2008]$;
- c) $f_n = \sin(x/n)$ na $[0, 1]$;
- d) $f_n = \sin^n(x)$ na $\mathbb{R}$;
- e) $f_n = \ln(e^x + \frac{1}{n})$ na $\mathbb{R}$.

Zad. 3 Pokaż, że

- a) każda funkcja Lipschitza jest jednostajnie ciągła;
- b) każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła;
- c) każdy ciąg funkcji zbieżny jednostajnie jest zbieżny punktowo;
- d) zbieżność jednostajna = zbieżność w metryce supremum.

Zad. 4 Zbadaj wnętrza i domknięcia poniższych zbiorów w $C[0, 1]$

- a) $\{f \in C[0, 1] : f(0) < 5\}$;
- b) $\{f \in C[0, 1] : \text{dla każdego } x \ 1 < f(x) \leq 5\}$;
- c) $\{f \in C[0, 1] : f \text{ jest stała}\}$;
- d) $\{f \in C[0, 1] : f(0) = 1\}$;
- e) $\{f \in C[0, 1] : f \text{ jest liniowa}\}$;

Zad. 5 Czy zbiór funkcji różniczkowalnych jest domknięty w $C[0, 1]$?

Zad. 6 Czy poniższe funkcje są jednostajnie ciągłe? Czy są Lipschitza?

- a) $f(x) = 1/x$ na $(0, 1)$;
- b) $f(x) = \cos(x)$ na $\mathbb{R}$;
- c) $f(x) = \sqrt{x}$ na $\mathbb{R}^+$;
- d) $f(x) = \sin(1/x)$ na $\mathbb{R}^+$.

Zad. 7 Podaj przykład funkcji f jednostajnie ciągłej takiej, że f^2 nie jest jednostajnie ciągła. Czy istnieje funkcja f , która nie jest jednostajnie ciągła, a f^2 i owszem?

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>