

Uwaga. Jest to lista dodatkowa. Przerabianie zadań z tej listy na ćwiczeniach jest surowo wzbronione.

Zad. 1 Przekonaj się o prawdziwości poniższych faktów dotyczących funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) jeśli f jest jednostajnie ciągła na A i na B , to jest też jednostajnie ciągła na $A \cup B$;
- b) jeśli f jest jednostajnie ciągła na B i $A \subseteq B$, to f jest jednostajnie ciągła na A ;
- c) jeśli istnieją ciągi (x_n) i (y_n) takie, że $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, lecz istnieje $C > 0$ taka, że $|f(x_n) - f(y_n)| > C$, to f nie jest jednostajnie ciągła.

Zad. 2 Zbadaj jednostajną ciągłość poniższych funkcji:

- a) $f(x) = |x|$ na $(-2, 3]$;
- b) $f(x) = \ln(x)$ na $(1, \infty)$;
- c) $f(x) = x\sqrt{x}$ na $\mathbb{R}^+$;
- d) $f(x) = x^2 \sin(1/x^3)$ na $(0, 7)$;
- e) $f(x) = \sin(x^2)$ na $\mathbb{R}$;
- f) $f(x) = e^{-x}$ na $\mathbb{R}^+$;
- g) $f(x) = x + \sqrt{x}$ na $\mathbb{R}^+$;
- h) $f(x) = \sqrt[15]{x}$ na $(0, 18)$;
- i) $f(x) = 1/x + 10/(x^2 - 10x)$ na $(0, 5]$;
- j) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ na $\mathbb{R}$;
- k) $f(x, y) = \sqrt{x} \sin(y)$ na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$;
- l) $f(x, y) = e^{xy}$ na $[0, 1]^2$;
- m) $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$ na $[0, \infty)^2$;
- n) $f(x, y) = \sqrt{x} \ln(y)$ na $[1, \infty)^2$;
- o) $f(x, y) = \ln(x^2 y)$ na $[1, \infty)^2$.

Zad. 3 Zbadaj jednostajną zbieżność na $\mathbb{R}$ poniższych ciągów funkcyjnych:

a) $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1/n}};$

b) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2n};$

c) $f_n(x) = \frac{n}{n+x^2};$

d) $f_n(x) = \cos(\sqrt{x^2 + 1/n});$

Zad. 4 Zbadaj jednostajną zbieżność na $[0, 1]$ poniższych ciągów funkcyjnych:

a) $f_n(x) = \sin(xn)/n;$

b) $f_n(x) = \sqrt[n]{x};$

c) $f_n(x) = x^n(1-x)^n;$

d) $f_n(x) = (2 - 1/n)x;$

e) $f_n(x) = nx^n(1-x);$

f) $f_n(x) = e^{x/n}.$