

Zad. 1 $f \in C(X)$ spełnia warunek Lipschitza w punkcie $x \in X$, jeżeli istnieje $L > 0$ takie, że dla każdego $y \in X$ zachodzi $|f(x) - f(y)| < Ld(x, y)$. Powiemy, że funkcja f jest funkcją Lipschitza *lokalnie*, jeżeli spełnia warunek Lipschitza w każdym punkcie swej dziedziny.

- a) pokaż, że jeśli funkcja spełnia warunek Lipschitza (globalnie), to spełnia go również lokalnie;
- b) podaj przykład funkcji, która jest Lipschitza lokalnie, ale nie globalnie;
- c) pokaż, że jeśli funkcja $f \in C(X)$ spełnia warunek Lipschitza lokalnie i X jest zwarta, to f jest funkcją Lipschitza (globalnie);
- d) czy dostrzegasz jakieś analogie z ciągłością i jednostajną ciągłością?

Zad. 2 Pokaż, że jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma ograniczoną pochodną, to spełnia warunek Lipschitza. Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Lagrange’a.

Zad. 3 Czy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, jeśli

- a) $f(x, y) = x + y$;
- b) $f(x, y) = xy$;
- c) $f(x, y) = x\sqrt[3]{y}$?

Zad. 4 Pokaż, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej składowe $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ są jednostajnie ciągłe. Pokaż, że podobny fakt zachodzi dla warunku Lipschitza.

Zad. 5 Pokaż, że funkcji $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \sin(1/x)$ nie da się jednostajnie aproksymować wielomianami.

Zad. 6 Pokaż, że dla $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:

- a) istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$;
- b) f rozszerza się do ciągłej funkcji g na $[0, 1]$;
- c) f jest jednostajnie ciągła na $(0, 1]$.

Zad. 7 Które z poniższych funkcji $T: X \rightarrow Y$ są ciągłe?

- a) $T(f) = f(0, 290109)$, $X = C[0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$;
- b) $T(f)(x) = 2f(x - 1) + 1$, $X = Y = C[0, 1]$;
- c) $T(f)(x) = f'(x)$, $X = C^1[0, 1]$, $Y = C[0, 1]$.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>