

Zad. 1 Sprawdź, czy normy, które pojawiły się dotychczas na wykładzie, rzeczywiście są normami.

Zad. 2 Czy dla dowolnych funkcji ograniczonych $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

- a) $\|fg\| = \|f\|\|g\|$;
- b) $\|2f + 1\| = 2\|f\| + 1$;
- c) $\|f^2\| = \|f\|^2$;
- d) $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$?

Zad. 3 Podaj przykład ciągu elementów $C[0, 1]$, który jest zbieżny w normie całkowej, a nie zbiega w normie supremum. Pokaż, że jeśli ciąg jest zbieżny w normie supremum, to zbiega również w normie całkowej.

Zad. 4 Pokaż, że $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$ i wywnioskuj, że w takim razie funkcja $f(x) = |||x||$ jest jednostajnie ciągła.

Zad. 5 Sprawdź wypukłość następujących zbiorów:

- a) $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$;
- b) kula w $\mathbb{R}^n$?

Zad. 6 Sprawdź, że $\text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, to zbiór punktów postaci $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, gdzie $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Zad. 7 Znajdź obszar zbieżności następujących szeregów funkcyjnych. Czy zbieżność jest jednostajna w tym obszarze? Czy jest niemal jednostajna?

- a) $\sum x^n / (5^n n^2)$;
- b) $\sum x^n / (2^n n)$;
- c) $\sum 3^n x^n / n^2$;
- d) $\sum 2^n / x^n$;
- e) $\sum \cos(nx) / (10^n)$;
- f) $\sum 1 / \sqrt{n^3 + x^2}$;
- g) $\sum n(\sqrt{x(1-x)})^n$.

Zad. 8 Pokaż, że w każdej niepustej przestrzeni Banacha jest szereg, który jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>