

Zad. 1 Czy podane szeregi można różniczkować wyraz za wyrazem na podanych podziorach $\mathbb{R}$?

- a) $\sum x^n/n!$ na $\mathbb{R}$;
- b) $\sum e^{-nx^2}/n^3$ na $\mathbb{R}$;
- c) $\sum e^{x-n}$ na $\mathbb{R}$;
- d) $\sum n^3x^n$ na $(-1, 1)$.

Zad. 2 Łącząc znaczenie słowa *niemal* z pojęciem *jednostajna ciągłość* można powiedzieć, że funkcja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest *niemal jednostajnie ciągła*, jeśli jest jednostajnie ciągła na każdym zwartym przedziale zawartym w I . Pod jaką nazwą znane są funkcje niemal jednostajnie ciągłe?

Zad. 3 Pokaż, że dla wektorów x, y w przestrzeni Hilberta następujące warunki są równoważne:

- a) $x \perp y$,
- b) $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ dla każdej liczby λ ,
- c) $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ dla każdej liczby.

Zad. 4 Oblicz $\langle f, g \rangle$ w $C_2(a, b)$, gdzie

- a) $f(x) = x, g(x) = x^2, a = 0, b = 1$;
- b) $f(x) = e^x, g(x) = x, a = 0, b = 1$;
- c) $f(x) = x, g(x) = x^2, a = -2, b = 2$;
- d) $f(x) = 1/x, g(x) = 1/(x+1), a = 0, b = 2$.

Zad. 5 Sprawdź, że w $C_2(-\pi, \pi)$ zachodzą następujące relacje dla $n, m \in \mathbb{N}$:

- a) $\cos(nx) \perp \cos(mx)$ i $\sin(nx) \perp \sin(mx)$, jeśli $n \neq m$;
- b) $\cos(nx) \perp \sin(mx)$;
- c) $\|\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)\| = 1$ i $\|\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)\| = 1$.

Wywnioskuj, że zbiór złożony z funkcji postaci $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ i $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ ($n \in \mathbb{N}$) jest ortonormalny.

Zad. 6 Napisz szeregi Fouriera funkcji

- a) $f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$;
- b) $f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>