

Zad. 1 Sformalizuj pojęcie całkowalności funkcji.

Zad. 2 Podaj przykład funkcji $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, która jest całkowalna, ale nie jest ciągła.

Zad. 3 Zauważ, że jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna i $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różni się od f w skończenie wielu punktach, to g jest całkowalna i

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx.$$

Zad. 4 Oblicz z definicji całkę $\int_{[0,5]} f$, gdzie $f(x) = [x]$.

Zad. 5 Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi. Wyjaśnij dlaczego

a) jeśli $f \geq 0$, to $\int_{[a,b]} f \geq 0$;

b) jeśli $f \geq h$, to $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} h$;

c) funkcja cf jest całkowalna i $\int_{[a,b]} cf = c \int_{[a,b]} f$ dla dowolnej stałej c .

Zad. 6 Wyjaśnij, dlaczego pole *pod wykresem* funkcji ciągłej jest opisywane przez jej funkcję pierwotną.

Zad. 7 Oblicz całkę $\int_K e^x d(x, y)$, gdzie K jest wnętrzem trapezu o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$.

Zad. 8 Wyprowadź wzór na pole koła.

Zad. 9 Rozważ następujące współrzędne eliptyczne: $x = 2r \cos(\phi)$, $y = 3r \sin(\phi)$. Oblicz związany z nimi jacobian.

Zad. 10 Współrzędne walcowe (r, ϕ, z) definiuje się w następujący sposób: $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$, $z = z$. Oblicz $\int_W x \, d(x, y, z)$ za pomocą współrzędnych walcowych, gdzie W jest walcem, którego podstawą jest okrąg o promieniu 1 o środku $(0, 0)$, a wysokość wynosi 2.

Zad. 11 Zdefiniuj współrzędne sferyczne i oblicz związany z nimi jacobian. Wyprowadź wzór na objętość kuli. *Zmień granice całkowania.*

Zad. 12 Oblicz długość fragmentu paraboli $y = x^2$ zawartego między prostą $x = 0$ i $x = 2$.

Zad. 13 Wyprowadź wzór na powierzchnię kuli.

Zad. 14 Niech $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych jednostajnie zbieżnym do f . Pokaż, że funkcja f jest całkowalna oraz

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n.$$