

Uwaga o zadaniu 2. (Trzeba było pokazać, że jeśli $f = 0$ μ -prawie wszędzie, to $\int f d\mu = 0$.)

Wiele osób przedstawiło następujące rozumowanie. Niech $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Wtedy mamy

$$\int_X f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu.$$

Ta druga całka wynosi zero i tutaj nie mam zastrzeżeń. Wielu z Was nie miało także oporów, żeby napisać, że pierwsza też się równa zero. To oczywiście prawda, ale wymagany jest tu pewien argument. Jeśli zaczniemy rozpisywać tę całkę, otrzymamy

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu = \int f d\mu,$$

ponieważ

$$f \chi_{\{x: f(x) \neq 0\}} = f.$$

Tak więc, żeby pokazać, że pierwsza całka $= 0$, trzeba wiedzieć, że całka, o której mamy udowodnić, że równa jest zero, jest w istocie równa 0.

Niestety nie mogłem dawać za to rozumowanie więcej niż 1 punkt, co niestety obniży liczbę punktów z kolokwium wielu, często całkiem dobrym, studentom