

Współczynniki kardynalne.

Zad. 1 Udowodnij, że $\mathfrak{s}$ jest najmniejszą liczbą kardynalną κ o własności: istnieje κ ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych takich, że dla każdego zbioru nieskończonego $Y \subseteq \omega$ chociaż jeden z naszych ciągów jest rozbieżny na Y (tzn. jego podciąg zadany przez Y jest rozbieżny).

Zad. 2 Udowodnij, że przestrzeń $\{0, 1\}^\kappa$ jest ciągowo zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa < \mathfrak{s}$. (Przestrzeń jest ciągowo zwarta, jeśli z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny.)

Zad. 3 Udowodnij, że jeżeli $X \subseteq \{0, 1\}^\omega$ jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{s}$, to $\lambda(X) = 0$ (λ jest tu standardową miarą na $\{0, 1\}^\omega$).

Zad. 4 *Podział* (interval partition) to rodzina niepustych przedziałów postaci $[n_k, n_{k+1})$. Powiemy, że podział $(I_k)_{k \in \omega}$ *dominuje* podział $(J_k)_{k \in \omega}$, jeżeli dla prawie wszystkich k istnieje l takie, że $J_l \subseteq I_k$. Pokaż, że $\mathfrak{d}$ jest najmniejszą mocą rodziny podziałów $\mathcal{I}$ o takiej własności, że dla każdego podziału $(J_k)_{k \in \omega}$ znajdziemy w $\mathcal{I}$ podział $(I_k)_{k \in \omega}$ dominujący $(J_k)_{k \in \omega}$. Podobnie, $\mathfrak{b}$ to najmniejsza moc rodziny podziałów, która nie da się zdominować przez pojedynczy podział.

Zad. 5 Powiemy, że filtr $\mathcal{F}$ na $P(\omega)$ jest *cherlawy*, jeżeli istnieje podział (patrz poprzednie zadanie) taki, że każdy zbiór z $\mathcal{F}$ tnie się niepusto z prawie każdym elementem podziału.

- a) Pokaż, że ultrafiltry nie są cherlawe.
- b) Udowodnij, że każdy filtr generowany przez mniej niż $\mathfrak{b}$ zbiorów jest cherlawy (czyli $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$).
- c) Udowodnij, że filtr jest cherlawy wtedy i tylko wtedy, gdy ma własność Baire'a (jako podzbiór 2^ω).

Uwaga: można dowieść, że istnieje niecherlawy filtr generowany przez $\mathfrak{b}$ zbiorów (Tw. Simona). W tym sensie $\mathfrak{b}$ jest najmniejszą liczbą kardynalną κ taką, że istnieje filtr bez własności Baire'a generowany przez κ elementów.

Zad. 6 *Skalę* nazywamy rodzinę funkcji $\{f_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq \omega^\omega$ taką, że $f_\alpha \leq^* f_\beta$ i dla każdej $g \in \omega^\omega$ istnieje α takie, że $g <^* f_\alpha$. Pokaż, że jeżeli $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, to istnieje skala.

Zad. 7 (Twierdzenie Ketonena) Pokaż, że $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy filtr generowany przez mniej niż $\mathfrak{c}$ zbiorów da się rozszerzyć do P-ultrafiltru.

Zad. 8 Niech $\mathfrak{i}$ będzie minimalną mocą maksymalnej rodziny niezależnej. Pokaż, że $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{i}$. Udowodnij, że $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{i}$.

Zad. 9 Pokaż, że $\mathfrak{b}$ jest najmniejszą liczbą kardynalną κ , dla której w $P(\omega)/\text{Fin}$ istnieje (ω, κ) -luka (tzn. rodziny prawie wstępujące $(L_n)_{n \in \omega}$, $(R_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ takie, że $L_n \cap R_\alpha =^* \emptyset$ dla każdego $n \in \omega$, $\alpha < \kappa$ i takie, że nie istnieje L rozdzielający $(L_n)_{n \in \omega}$ i $(R_\alpha)_{\alpha < \kappa}$).