Zastosowania kombinatoryki nieskończonej lista 5 2014

Aksjomat Martina.

Zad. 1 Pokaż, że $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$ jest sprzeczny.

Zad. 2 Załóżmy $\mathsf{MA}(\kappa)$. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, która jest ccc (tzn. każda rodzina parami rozłącznych zbiorów otwartych jest przeliczalna). Niech $\{U_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ będzie rodziną zbiorów otwartych i gęstych. Pokaż, że $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

Zad. 3 Powiemy, że algebra Boole'a $\mathfrak{A}$ ma ω_1-prekaliber, jeżeli z każdej nieprzeliczalnej podrodziny $\mathfrak{A}$ można wybrać nieprzeliczalną podrodzinę scentrowaną. Pokaż, że z $\mathsf{MA}(\omega_1)$ wynika, że każda algebra Boole'a, która jest ccc ma ω_1-prekaliber.

Zad. 4 Rozważmy wersję Aksjomatu Martina, w której rozważa się jedynie *przeliczalne* porządki (oczywiście jest to wersja słabsza niż Aksjomat Martina). Pokaż, że pociąga ona $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Wskazówka: rozważ porządek

$$\mathbb{P} = \{f \colon f - \text{ funkcja}, \mathrm{dom}(f) \in [\omega]^{<\omega}, \mathrm{rng}(f) \subseteq \omega\}$$

z relacją odwróconej inkluzji.

Zad. 5 Pokaż bezpośrednio (nie korzystając z nierówności $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$), że $\mathsf{MA}(\omega_1)$ pociąga za sobą $\mathfrak{a} > \omega_1$.

Model Cohena.

Zad. 6 Pokaż, że w standardowym modelu Cohena $\mathfrak{i} = \mathfrak{c}$.

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`