Zastosowania kombinatoryki nieskończonej lista 6 2014

$\beta\omega$ jako lewa topologiczna półgrupa.

Ćw. 1 Skonstatuj, że dodawanie ultrafiltrów jest łączne.

Zad. 2 Pokaż że $(m) + p = p + (m)$ dla każdego $p \in \beta\omega$ i $m \in \omega$.

Zad. 3 Pokaż, że jeśli $p \in \beta\omega \setminus \omega$ rozszerza filtr zbiorów gęstości 1, to dla każdego q ultrafiltr $p + q$ również rozszerza filtr zbiorów gęstości 1.

Zad. 4 Udowodnij, że jeżeli $p \in \beta\omega \setminus \omega$ zawiera zbiór gęstości 0, to dla każdego q ultrafiltr $p + q$ zawiera zbiór gęstości 0.

Zad. 5 Użyj poprzednich zadań, by pokazać, że dodawanie ultrafiltrów nie jest przemienne. Wyciągnij stąd wniosek, że odwzorowanie T_q dane wzorem $T_q(p) = p + q$ nie jest ciągłe.

Zad. 6 Pokaż, że jeśli p jest P-ultrafiltrem, to p nie jest postaci $p = q + r$ dla żadnych $q, r \in \beta\omega \setminus \omega$.

Zad. 7 Niech Σ będzie skończonym alfabetem, a W zbiorem słów nad Σ. Niech v będzie znakiem spoza Σ (*zmienną nad* W), A - zbiorem słów nad $\Sigma \cup \{v\}$ i $V = A \setminus W$. Dla każdego $a \in \Sigma$ niech $\bar{a}\colon A \to W$ będzie funkcją przypisującą słowom nad $\Sigma \cup \{v\}$ słowa nad Σ, w których wszystkie wystąpienia v zostały zamienione na a. Udowodnij twierdzenie Halesa-Jewetta: dla każdej skończonej partycji W istnieje $x \in V$ i element partycji, taki, że $\bar{a}(x)$ należy do tego elementu dla każdego $a \in A$. (Patrz [1, Theorem 8]).

Zad. 8 Udowodnij twierdzenie Hindmana: dla każdej skończonej partycji ω istnieje nieskończony element tej partycji A oraz jego nieskończony podzbiór $B \subseteq A$ taki, że wszystkie skończone sumy elementów B siedzą w A. (Patrz [1, Theorem 7, drugi dowód].)

Zad. 9 Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $T\colon X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Rozważamy układ dynamiczny (X, T). Powiemy, ze $x \in X$ jest *powracający*, jeśli dla każdego otoczenia $x \in G$ mamy $T^n(x) \in G$ dla nieskończenie wielu n. Pokaż, że x jest powracający, jeżeli $T^p(x) = x$ dla pewnego ultrafiltru p (gdzie $T^p(x) = \lim_{n \to p} T^n(x)$).

Zad. 10 Podobnie, jak w poprzednim zadaniu rozważamy układ dynamiczny (X, T). Punkt $x \in X$ jest *jednostajnie powracający*, jeżeli dla każdego otoczenia $x \in G$ istnieje $M \in \omega$ taki, że dla każdego n istnieje $k < M$ taki, że $T^{n+k}(x) \in G$. Pokaż, że x jest jednostajnie powracający, jeżeli dla każdego ultrafiltru p znajdziemy ultrafiltr q taki, że $T^{q+p}(x) = x$.

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`

Literatura

[1] A. Blass, *Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics*, http://www.math.lsa.umich.edu/ ablass/ufdyn.ps