Zastosowania kombinatoryki nieskończonej **lista 7** 2014

Zad. 1 (Ameba forcing)

- Niech $\varepsilon > 0$. Udowodnij, że porządek

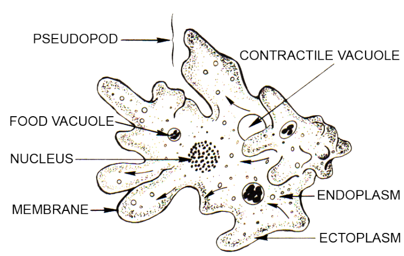
$$\mathbb{A}_\varepsilon = \{U \subseteq \mathbb{R} \colon \lambda(U) < \varepsilon, U \text{ - otwarty}\}$$

  z relacją $\supseteq$ jest ccc. (Wskazówka: rozważmy nieprzeliczalną podrodzinę $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{A}_\varepsilon$. Dla każdego $R \in \mathcal{R}$ ustalmy skończoną sumę przedziałów o końcach wymiernych $R' \subseteq R$ taką, że $\lambda(R - R') < \varepsilon - \lambda(R)$. Użyj faktu, że jest tylko przeliczalnie wiele takich skończonych sum.)

- Pokaż, że jeśli $N \in \mathcal{N}$, to $D_N = \{U \in \mathbb{A}_\varepsilon \colon N \subseteq U\}$ jest gęsty w $\mathbb{A}_\varepsilon$.

- Pokaż, że jeśli G jest generic nad $\mathbb{A}_\varepsilon$, to $\lambda(\bigcup G) \leq \varepsilon$.

- Wywnioskuj z powyższych, że MA implikuje, że $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$ (a więc, że wszystkie współczynniki w diagramie Cichonia równają się $\mathfrak{c}$).



Zad. 2 Zbadaj współczynniki kardynalne ideału zbiorów przeliczalnych na prostej.

Zad. 3 Niech $\mathbb{M}$ będzie następującym ideałem na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{M} = \{M \subseteq \mathbb{R}^2 \colon \exists B \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^2)\ M \subseteq B \text{ i } \forall x \in \mathbb{R}\ \lambda(B_x) = 0\}.$$

Co można powiedzieć o współczynnikach non i cov tego ideału? A o add ($\lightning$)?

Zad. 4 Dla $I \subseteq \omega$ oznaczmy $\bar{I} = \{X \subseteq \omega \colon |X \cap I| = \aleph_0\}$. Każdemu ideałowi $\mathcal{I}$ podzbiorów ω możemy przypisać ideał podzbiorów 2^ω w następujący sposób:

$$\bar{\mathcal{I}} = \{X \subseteq P(\omega) \colon \exists I \in \mathcal{I}\ X \subseteq \bar{I}\}$$

- Pokaż, że $\bar{\mathcal{I}}$ jest ideałem,
- Pokaż, że $\bar{\mathcal{I}}$ jest σ-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ jest P-ideałem,
- Pokaż, że

$$\operatorname{add}(\bar{I}) = \min\{|\mathcal{A}|\colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ i } \forall X \in \mathcal{I}\ \exists A \in \mathcal{A}\ A \not\subseteq^* X\}$$

$$\operatorname{cov}(\bar{I}) = \min\{|\mathcal{A}|\colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ i } \forall X \in [\omega]^\omega\ \exists A \in \mathcal{A}\ |A \cap X| = \aleph_0\}$$

$$\operatorname{non}(\bar{I}) = \min\{|\mathcal{A}|\colon \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega \text{ i } \forall I \in \mathcal{I}\ \exists A \in \mathcal{A}\ |A \cap I| < \aleph_0.\}$$

- Zaproponuj charakteryzację $\operatorname{cof}(\bar{I})$.
- Jakie są współczynniki ideału zbiorów skończonych? Ideału maksymalnego? Ideału zbiorów gęstości 0 ($\lightning$)?

Zad. 5 Zbiór $L \subseteq \mathbb{R}$ (mocy $\mathfrak{c}$) nazywamy *uogólnionym zbiorem Łuzina*, jeżeli $|L \cap M| < \mathfrak{c}$ dla każdego $M \in \mathcal{M}$. Pokaż, że jeżeli zachodzi $\operatorname{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, to istnieje uogólniony zbiór Łuzina. Wskazówka: użyj indukcji pozaskończonej konstruując L punkt po punkcie.

Zad. 6 (Twierdzenie Erdosa-Ulama.) Pokaż, że jeżeli $\operatorname{add}(\mathcal{N}) = \operatorname{cof}(\mathcal{N})$, to istnieje bijekcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(A) \in \mathcal{M} \iff A \in \mathcal{N}$.

Wskazówka: Rozważmy rosnącą bazę $(N_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ ideału $\mathcal{N}$ i rosnącą bazę $(M_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ ideału $\mathcal{M}$ (gdzie $\kappa = \operatorname{add}(\mathcal{N})$). Załóżmy, że $N_0 \cup M_0 = \mathbb{R}$ i $N_0 \cap M_0 = \emptyset$ oraz, że $|N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha| = \mathfrak{c}$ (podobnie dla $(M_\alpha)_{\alpha<\kappa}$). Ustalaj bijekcję na kawałkach $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$...

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`