Zastosowania kombinatoryki nieskończonej lista 8 2014

Kunen's L-space [1981] a'la Plebanek [1997]

Ta lista jest ściśle związana z konstrukcją prezentowaną na wykładzie 6 maja.

Legenda:

- HS = hereditarily separable,
- HL = hereditarily Lindelof,
- X - przestrzeń Hausdorffa,
- K - przestrzeń skonstruowana na wykładzie,
-  - Kenneth Kunen,
- λ - standardowa miara na 2^{ω_1}.

Zad. 1 Pokaż, że jeśli X jest metryzowalna, to X jest HL $\iff$ X jest HS.

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli istnieje ciągła surjekcja $f\colon X \to [0,1]^{\omega_1}$, to na X istnieje miara nieośrodkowa. (Uwaga: tę implikację można odwrócić przy założeniu $\mathsf{MA}+\neg\mathsf{CH}$ [Fremlin 200*].)

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest przeliczalną podalgebrą Borel(2^{ω_1}), a B jest borelowskim podzbiorem 2^{ω_1} takim, że $\lambda(B) > 0$, to istnieje domknięty $F \subseteq B$ taki, że

$$\inf\{\lambda(A \bigtriangleup F)\colon A \in \mathfrak{A}\} > 0.$$

Zad. 4 Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną tych zbiorów, o które rozszerzamy nasze algebry w konstrukcji przestrzeni K, tzn.

$$\mathcal{F} = \{F_\xi\colon \xi < \omega_1\} \cup \{F^\xi_\alpha\colon \xi, \alpha < \omega_1\}.$$

Pokaż, że dla każdego $x \in K$

$$|\{F \in \mathcal{F}\colon x \in F\}| = \aleph_0.$$

Wywnioskuj stąd, że K nie jest ośrodkowa (wskazówka: gdyby była, to K miałoby bazę przeliczalną). Wywnioskuj z kolei, że K jest w takim razie L-space.

Zad. 5 Niech $\mathcal{E}$ będzie ideałem na $\mathbb{R}$ generowanym przez domknięte zbiory miary 0. Pokaż, że $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$. Czy $\mathcal{E}$ jest ideałem ccc? (Innymi słowy: czy każda rodzina zbiorów borelowskich, które parami kroją się na zbiorach z $\mathcal{E}$, musi być przeliczalna?)

Techniczny lemat, na którym bazowała konstrukcja:

Zad. 6 Niech $\mathcal{A} = \mathrm{Clop}(2^\omega)$ i niech μ będzie standardową miarą na 2^ω. Niech $\mathcal{Z}$ będzie rodziną wszystkich ciągów z $\mathcal{A}$ i niech

- $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{Z} \colon S(0) \supseteq S(1) \supseteq S(2) \ldots \quad \lim \mu(S(n)) = 0\}$,
- $\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{Z} \colon T(0) \supseteq T(1) \supseteq T(2) \ldots \quad \lim \mu(T(n)) > 0\}$,

Pokaż, że z $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \omega_1$ wynika, że

- istnieje $\{S_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{S}$ taka, że dla każdego $S \in \mathcal{S}$ istnieje $\alpha < \omega_1$ taka, że dla każdego n istnieje k takie, że $S_\alpha(n) \supseteq S(k)$.
- istnieje $\{T_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{T}$ taka, że dla każdego $T \in \mathcal{T}$ istnieje $\alpha < \omega_1$ taka, że dla każdego k istnieje n takie, że $T(k) \supseteq T_\alpha(n)$.

Wskazówka: użyj (bez dowodu) następujących faktów:

- $\mathrm{cof}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ ([Bartoszyński-Shelah]),
- $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \omega_1$ implikuje, że istnieje rodzina $\mathcal{B}$ borelowskich podzbiorów 2^ω dodatniej miary taka, że $|\mathcal{B}| = \omega_1$ i dla każdego borelowskiego C podzbioru 2^ω miary dodatniej istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki, że $B \subseteq C$. ([Cichoń, Kamburelis, Pawlikowski]).

Zad. 7 Niech $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ będzie dobrze uporządkowanym ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Oznaczmy $Z = \{x_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}$.

- Niech τ_s będzie topologią na Z definiowaną przez otoczenia punktów w następujący sposób: otoczeniami x_α są zbiory postaci $(x_\alpha - \varepsilon, x_\alpha + \varepsilon) \cap \{x_\xi \colon \xi \leq \alpha\}$.
- Niech τ_l będzie topologią na Z definiowaną przez otoczenia punktów w następujący sposób: otoczeniami x_α są zbiory postaci $(x_\alpha - \varepsilon, x_\alpha + \varepsilon) \cap \{x_\xi \colon \xi \geq \alpha\}$.

Pokaż, że (Z, τ_s) jest S-space, a (Z, τ_l) jest L-space. Pokaż, że te topologie są Hausdorffa, lecz nie są regularne.

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`