Zastosowania kombinatoryki nieskończonej   program wykładu

2014

a) Indukcja pozaskończona.

   (a) Dobre porządki i liczby porządkowe.

   (b) Zastosowania: zbiór Bernsteina, hierarchia zbiorów borelowskich, pochodna Cantora-Bendixsona.

b) $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ i przestrzenie Mrówki.

   (a) Ideały na $P(\omega)$: Frecheta, sumowalny, zbiorów gęstości 0, ideały maksymalne.

   (b) Podstawowe struktury w $P(\omega)/\mathrm{Fin}$: rodziny prawie rozłączne, wieże, rodziny niezależne, luki Hausdorffa.

   (c) Zastosowanie: przeliczalna zwartość, pseudo-zwartość i przestrzeń Mrówki.

c) Dualizm Stone'a i $\beta\omega$.

   (a) Twierdzenie Stone'a.

   (b) Podstawowe własności $\beta\omega$: moc, aksjomaty przeliczalności itp.

   (c) Niejednorodność $\beta\omega$ (przy założeniu istnienia P-ultrafiltrów).

   (d) Przykłady przestrzeni Stone'a podalgebr $P(\omega)$.

d) $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ przy CH: twierdzenia Parowiczenki, F-przestrzenie i uzwarcenia Czecha-Stone'a. [7]

   (a) Granica po filtrze.

   (b) Twierdzenia Parowiczenki.

   (c) Twierdzenie Tajmanowa i Urysohna.

   (d) Charakteryzacja przeliczalnych luk.

e) $P(\omega)/\mathrm{Fin}$ bez CH: współczynniki kardynalne. [4], [9]

   (a) Współczynniki $\mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{u}$.

   (b) Podstawowe nierówności: $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$.

   (c) Interpretacje topologiczne: $\mathfrak{p}$ a przestrzenie Frecheta, $\mathfrak{d}$ a zbiory zwarte w ω^ω, $\mathfrak{s}$ a ciągowa zwartość.

   (d) Związane zagadnienia: twierdzenie Ketonena, filtry cherlawe a własność Baire'a.

f) Ostre nierówności między współczynnikami: aksjomat Martina i model Cohena. [10], [9]

   (a) Ideologia aksjomatu Martina.

   (b) Aksjomat Martina implikuje $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.
   (c) W standardowym modelu Cohena $\mathfrak{a} = \omega_1 < \mathfrak{c}$.

g) $\beta\omega$ jako półgrupa. [11], [5]

   (a) Twierdzenie Ellisa i twierdzenie Glazera.
   (b) Niejednorodność algebraiczna $\beta\omega \setminus \omega$.
   (c) Twierdzenia van der Waerdena, Hindmana, Halesa-Jewetta.

h) Prosta rzeczywista i diagramy Cichonia. [2]

   (a) Definicje współczynników kardynalnych i nierówności między nimi.
   (b) Zależności między cov i non miary i kategorii.
   (c) Twierdzenie Bartoszyńskiego o nierówności Tukeya między $(\omega^\omega, \leq^*)$ a $\mathcal{M}$.

i) Współczynniki w akcji: konstrukcja L-space Kunena [1981] w wersji Plebanka [1997].

   (a) Charakteryzacje HS i HL przez ciągi separowane.
   (b) Definicje L-space i S-space.
   (c) Konstrukcja Kunena przy $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) = \omega_1$.

j) Przestrzenie suslinowskie, konstrukcje Bella. ([3])

   (a) Problem Suslina.
   (b) Małe kompakty Suslina.
   (c) Metoda *Total Ideal Spaces* Bella.

k) Analityczne P-ideały i zbieżność w przestrzeni miar. ([6])

   (a) Twierdzenie Soleckiego (bez dowodu).
   (b) Porządki na ideałach na ω.
   (c) Przestrzenie wypukle Frecheta-Urysohna.

l) Nierefleksywne przestrzenie Grothendiecka. ([8])

   (a) Problem Jefimowa i jego odpowiedniki dla przestrzeni miar.
   (b) Konstrukcja Haydona nierefleksywnej przestrzeni Grothendiecka bez kopii ℓ_∞.

m) Tw. Lowenheima-Skolema w teorii kontinuów. ([1])

   (a) Przestrzenie Wallmana.
   (b) Elementarne podkraty zbiorów domkniętych.
   (c) Dowód twierdzenia faktoryzacyjnego Mardesica przez tw. Lowenheima-Skolema.
   (d) Sprowadzanie (kontr)przykładów do przykładów metrycznych - problem Lelka.

Literatura

[1] D. Bartosova, K.P. Hart, L. Hoehn, B. van der Steeg, *Lelek's problem is not a metric problem*, Topology Appl. 158 (2011), no. 18, 2479–2484.

[2] T. Bartoszyński, H. Judah, *On the structure of the real line.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[3] M. Bell, *A compact ccc non-separable space from a Hausdorff gap and Martin's axiom* Comment. Math. Univ. Carolin., 37(3):589, 1996.

[4] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, `http://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/hbk.pdf`

[5] A. Blass, *Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics*, http://www.math.lsa.umich.edu/ ablass/ufdyn.ps

[6] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas, *Cardinal coefficients associated to certain orders on ideals*, http://www.math.uni.wroc.pl/ pborod/preprints/cardinal_invariants.pdf

[7] R. Frankiewicz, P. Zbierski, *Granice i luki*, PWN, Warszawa 1992.

[8] R. Haydon, *A non-reflexive Grothendieck space that does not contain* $\ell_i nfty$, Israel Journal of Mathematics 40/1, 1981.

[9] W. Just, M. Weese, *Discovering Modern Set Theory II*, AMS, 1997.

[10] K. Kunen, *Set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980. xvi+313 pp.

[11] S. Todorcevic, *Topics in Topology*, Lecture Notes in Mathematics 1652, Springer, 1997.

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`