Zadania - Page Rank

Niech G będzie grafem nieskierowanym o n wierzchołkach, a M jej macierzą sąsiedztwa (tzn. taką macierzą, jaką zdefiniował Tomasz w swoim odczycie). Niech $\vec{v}$ będzie wektorem w $\mathbb{R}^n$ o wszystkich współrzędnych równych 1.

Zad. 1 Udowodnij, że $M \cdot \vec{v}$ daje nam wektor, którego współrzędne reprezentują stopnie odpowiednich wierzchołków.

Zad. 2 Udowodnij, że element M^k o indeksie (i, j) reprezentuje liczbę dróg długości k między wierzchołkami indeksowanymi i i j.

Zad. 3 Udowodnij, że jeśli graf jest spójny, to dla pewnego k macierz M^k ma wszystkie elementy dodatnie.

Zad. 4 Algorytm PageRank używa wektorów własnych, żeby uniknąć wielokrotnego mnożenia macierzy. Problemem, ominiętym nieco przez Tomka w jego prezentacji, jest to, że macierz sąsiedztwa może mieć wiele wartości własnych, a zatem i wektorów własnych. Który z nich zatem wybrać? Twierdzenie Perrona-Frobeniusa mówi, że macierz sąsiedztwa będzie miała największą (co do modułu) wartość własną i będzie ona rzeczywista. Poniżej szkic dowodu, że to właśnie wektor własny związany z tą wartością własną należy rozważyć. Uzupełnij szczegóły.
Niech (λ_i) będą wartościami własnymi M, a $(\vec{v}_i)$ odpowiadającymi im wektorami własnymi, przy czym λ_0 jest największą wartością własną. Niech

$$\vec{v} = \alpha_0 \vec{v}_0 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n,$$

gdzie $\alpha_0 \neq 0$. Sprawdź, że

$$M^k \vec{v} = \lambda_0^k \alpha_0 \vec{v}_0 + \cdots + \lambda_n^k \alpha_n \vec{v}_n.$$

Sprawdź, co to będzie

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{M^k \vec{v}}{\lambda_0^k} \right)$$

i wyciągnij wnioski.

Zad. 5 Sprawdź, dlaczego algorytm PageRank nazywa się właśnie tak. O dziwo są dwa sensowne wyjaśnienia.