
Zadania - zadanie Steinhausa o punktach kratowych

Zad. 1 Pokaż, że istnieje kula w metryce taksówkowej, która zawiera dokładnie n punktów dla $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zad. 2 Narysuj symetralne paru wybranych punktów w metryce maksimum, taksówkowej, dyskretnej. Znajdź takie, które mają niepuste wnętrza.

Zad. 3 Pokaż, że w przestrzeni Hilberta każda symetralna ma puste wnętrza. (Wskazówka: w przestrzeni Hilberta mamy do dyspozycji pojęcie prostopadłości. Możemy użyć go do sformułowania warunku równoważnego definicji symetralnej. Należy też skorzystać z tego, że jeśli domknięta podprzestrzeń przestrzeni Hilberta ma niepuste wnętrza, to jest całą przestrzenią, dowodząc to przy okazji.)

Zad. 4 Udowodnij, używając twierdzenia Baire'a, że liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalnie wiele.

Zad. 5 Udowodnij, używając twierdzenia Baire'a, że suma przeliczalnie wielu płaszczyzn nie jest całą przestrzenią (trójwymiarową).

Zad. 6 Spróbuj znaleźć symetralną funkcji $f(x) = 0$ i $f(x) = 1$ w przestrzeni funkcji ciągłych z metryką supremum. Czy ma ona niepuste wnętrza?