Zadania - Fraktale a Banach

Zad. 1 Pokaż, że każde odwzorowanie zwężające jest funkcją ciągłą.

Zad. 2 Niech $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym i niech x będzie dowolnym elementem X. Pokaż, że ciąg $(f_n(x))_n$ jest ciągiem Cauchy'ego. Załóżmy teraz dodatkowo, że X jest zupełna. Wobec tego $(f_n(x))$ ma granicę, nazwijmy ją y. Pokaż, że $f(y) = y$. Uświadom sobie, że właśnie udowodniłaś twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Zad. 3 Niech $x \in \mathbb{R}^2$ i niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie zwarty. Pokaż, że istnieje $y \in A$ taki, że $d(x, y) = \inf\{d(x, a)\colon a \in A\}$ (mówimy w takim wypadku, że y *realizuje* odległość x od A). Pokaż, że jeżeli A nie jest domknięty, to może nie istnieć y realizujący odległość x od A.

Zad. 4 Podaj przykład dwóch różnych zbiorów A, $B \subseteq \mathbb{R}^2$, których odległość Hausdorffa wynosi 0. Pokaż, że jeżeli A i B są zwarte, to takiego przykładu nie znajdziemy. (Wniosek: żeby metryka Hausdorffa była w istocie metryką nie można określać jej na wszystkich podzbiorach).

Zad. 5 Oznaczmy przez d_H metrykę Hausdorffa na płaszczyznie. Niech $x, y \in \mathbb{R}^2$. Czym jest $d_H(\{x\}, \{y\})$?

Zad. 6 Podaj przykład ciągu (A_n) podzbiorów płaszczyzny, który jest zbieżny w metryce Hausdorffa do odcinka $\{0\} \times [0, 1]$.

Zad. 7 Czy ciąg trójkątów może zbiegać w metryce Hausdorffa do kwadratu?

Zad. 8 Wybierz swój ulubiony fraktal z odczytu Oli i upewnij się, że ciąg iteracji zbiega w metryce Hausdorffa do tego fraktala.

Zad. 9 Napisz iterowany system funkcyjny dla krzywej Kocha (jeśli nie wiesz, co to jest krzywa Kocha, to wiesz kogo o nią zapytać).