T. Nadzieja

O pewnym zagadnieniu w teorii filtracji

WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I CHEMII

INSTYTUT MATEMATYKI

Tadeusz Nadzieja

O PEWNYM ZAGADNIENIU W TEORII FILTRACJI

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
doc. dr Andrzeja Krzywickiego

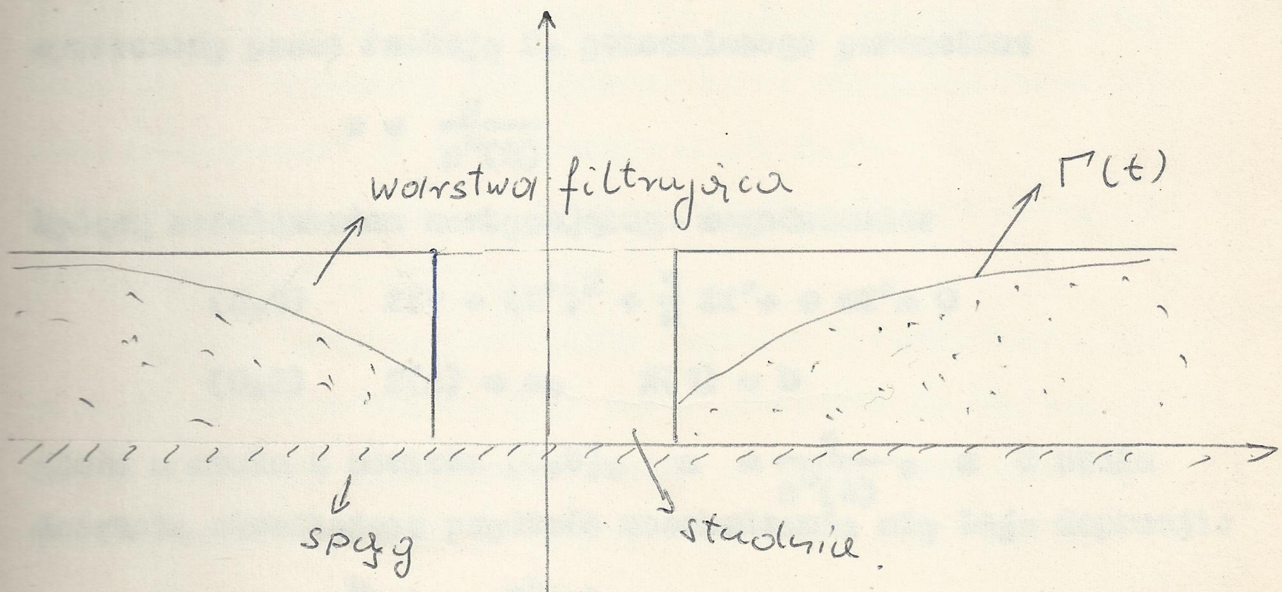
Wrocław 1974 r.

I. W S T E P

W pracach [1],[2] autorzy rozpatrywali zagadnienie płaskiego, nieustalonego sczerpywania cieczy z poziomej półnieskończonej warstwy ośrodka filtrującego, ograniczonej z dołu spągiem (ośrodkiem nieprzepuszczającym cieczy) i graniczącej wzdłuż odcinka pionowego brzegu z nieskończonym zbiornikiem cieczy o stałej wysokości.

Zadaniem tej pracy jest przeniesienie wyników zawartych w [1] na przypadek 3-wymiarowy osiowo symetryczny co odpowiada sczerpywaniu cieczy z ośrodka filtrującego przez powierzchnię boczną studni.

W przestrzeni 3-wymiarowej wprowadzamy układ współrzędnych kartezjańskich, płaszczyzna x,y pokrywa się z dolną granicą warstwy filtrującej o stałej grubości, oś pionowa z jest osią symetrii studni (rys.1)



Interesuje nas kształt brzegu swobodnego Γ(t), to jest powierzchni oddzielającej obszar nasycony cieczą od reszty ośrodka.

Dla uproszczenia grubość warstwy filtrującej i promień studni przyjmujemy równe jeden.

Oznaczmy przez $h(t,x,y)$ wysokość słupa cieczy nad punktem $(x,y,0)$. Oczywiście funkcja h zależy tylko od czasu i odległości r punktu $(x,y,0)$ od początku układu współrzędnych.

<u>DEFINICJA 1.</u>

Liczbę $r^b(t) = \max\{r : h(r,t) \leq b\}$ nazywamy zasięgiem leja depresji.

Będziemy rozpatrywali tylko takie przypadki kiedy $h(1,t) = \text{const}$, co oznacza, że poziom zaczerpywania nie zależy od czasu.

W rozdziale I rezygnujemy z określenia $\Gamma(t)$ na całym obszarze przepływu i ustalając b ograniczymy się do tych r dla których $h(r,t) \leq b$. W tym przypadku brzeg swobodny w chwili t na obszarze $\{r = h(r,t) \leq b\}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcję f, pomocniczego parametru:

$$s = \frac{r}{r^b(t)}$$

będącą rozwiązaniem następującego zagadnienia:

$$(0,1) \qquad ff'' + (f')^2 + \frac{1}{s} ff' + c\, sf' = 0$$

$$(0,2) \qquad f(\alpha) = a, \quad f(1) = b$$

gdzie a stała z odcinka $[0,b]$, $\alpha = \dfrac{1}{r^b(t)}$, a c stała dodatnia określająca prędkość rozchodzenia się leja depresji:

$$r^b(t) \cdot r'^b(t) = c$$

skąd

$$r^b(t) = \sqrt{2ct+1}$$

W rozdziale następnym zajmiemy się globalnym zachowaniem brzegu swobodnego. Będziemy badać funkcję f spełniającą równania (0,1) i warunki brzegowe (0,3) $f(a) = a$, $f(+\infty) = 1$, w ten sposób brzeg $\Gamma(t)$ będzie określony na całym obszarze przepływu.

Wybierając różne liczby b z odcinka $(0,1]$ otrzymujemy różne stałe C. W pracy tej nie podamy żadnego ograniczenia na C, co może wydawać się z fizycznego punktu widzenia rzeczą niepokojącą, do sprawy tej powrócimy jeszcze na końcu rozdziału II.

Jeśli mamy na uwadze konkretne zjawisko zasysania to jego opis matematyczny dany jest równaniem różniczkowym (0,1) i warunkiem brzegowym (0,3), przy czym stała C może być dowolną liczbą dodatnią.

Jeśli opis taki ma być sensowny to należy wykazać niezależność od C wielkości fizycznych, które można wyliczyć mając dane rozwiązanie f zagadnienia (0,1)(0,3).

Taką wielkością jest na przykład przepływ cieczy przez powierzchnię boczną studni.

Osobne miejsce poświęcimy analizie jakościowej i ilościowej przepływu cieczy $Q(t)$ przez powierzchnię boczną studni. Jak wiadomo [1] przepływ w chwili t przez powierzchnię boczną walca o promieniu $r^b(t)$, a wyraża się wzorem:

$$Q(t) = \frac{1}{r^b(t)} \quad sf(s)f'(s)$$

W rozdziale I oszacujemy z góry i z dołu przepływ $Q(t)$ i zajmiemy się jego zależnością od stałych C i a. W dalszej części udowodnimy twierdzenie pozwalające uniezależnić się od stałej C przy badaniu $Q(t)$ i oszacujemy prędkość z jaką przepływ przez powierzchnię boczną walca o promieniu r dąży do zera gdy r zmierza do nieskończoności.

a głębokość studni
(poziom swerpywania)

$s = \frac{r}{r_b}$ $s = \alpha \iff r = 1$ brzeg st.
$s = 1 \iff r = r^b$ koniec leja depresji

ROZDZIAŁ I

ZAGADNIENIE BRZEGOWE NA ODCINKU $[\alpha, 1]$

Zajmiemy się teraz następującym zagadnieniem

(1.1) $\quad ff'' + (f')^2 + \frac{1}{s} ff' + Csf' = 0 \quad$ gdzie $C > 0,\ \alpha < s < 1$

(1.2) $\quad f(\alpha) = a \quad f(1) = 1 \quad \alpha \in (0,1), \quad a \in [0,1]$

Wykonując podstawienie $s = \alpha^{1-t}$ sprowadzamy zagadnienie (1.1) (1.2) do postaci

(1.3) $\quad gg'' + (g')^2 + BA^t g' = 0$

(1.4) $\quad g(0) = a \qquad g(1) = 1$

gdzie $B = C \cdot \ln\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha^2, \quad A = \alpha^{-2}$

(1.5) $\quad f(s) = g\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\alpha}} \cdot \ln\frac{s}{\alpha}\right)$

Będziemy teraz zmierzać do udowodnienia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1.3)(1.4)

Z ogólnej teorii równań różniczkowych zwyczajnych wynika:

TWIERDZENIE 0 [3]

Wszystkie punkty półpłaszczyzny $g > 0$ są punktami jednoznaczności równania (1.3), to znaczy przez każdy punkt $< g, g' >$ ($g > 0$, g' dowolne) przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie (1.3).

Fakt ten będzie dalej bardzo często wykorzystywany.

Lemat 1.

Jeśli funkcja g jest rozwiązaniem (1.3) (1.4) to

(1.6) (i) $g(\tau) > 0$ (ii) $g'(\tau) > 0$ (iii) $g''(\tau) < 0$

dla $0 < \tau < 1$, przy czym ostatnie dwie nierówności są prawdziwe dla $s \neq 1$.

Dowód.

Zaczniemy od dowodu nierówności (i).

Załóżmy istnienie punktu $\tau_0 \neq 0$ takiego, że $g(\tau_0) = 0$, warunki (1.4) pozwalają dodatkowo zażądać spełnienia nierówności $g(\tau) > 0$ dla $\tau \geq \tau_0$. Powołując się jeszcze na (1.4) i twierdzenie 0 otrzymujemy nierówność $g'(\tau) > 0$, spełnioną dla $\tau \geq \tau_0$.

Całkowanie równania (1.3) po odcinku (τ_0, τ) prowadzi do równości:

$$gg'(\tau) + B\int_{\tau_0}^{\tau} A^u g'(u)\, du = 0,$$

która nie może być spełniona ze względu na założenia o liczbach B, A i nierówności $g'(\tau) > 0$.

Wyjściowe założenie prowadzi do sprzeczności, co dowodzi prawdziwości naszej tezy.

Nierówność (1.6) (ii) wynika w oczywisty sposób z (1.6) (i) i twierdzenia 0 a (1.6) (iii) z (1.6) (i)(ii) i kształtu równania (1.3)

Z)1.6) i postaci (1.3) wynikają nierówności

(1.7) $(g^2)' > 0$ $(g^2)'' < 0$

które prowadzą do oszacowania

(1.8) $\sqrt{\tau} \leq g(\tau) \leq 1.$

Dzieląc równanie (1.3) przez gg'' i całkując po odcinku $(\tau,1)$ otrzymujemy:

(1.9) $$gg''(\tau) = \beta \exp \left[B \int_{\tau}^{1} \frac{A^u}{g(u)} du\right] \quad \text{gdzie} \quad \beta = g''(1)$$

Całkując (1.9) po tym samym odcinku dostajemy całkową postać równania różniczkowego (1.3)

(1.10) $$g^2(\tau) = 1 - 2\beta \int_{\tau}^{1} \exp \left[B \int_{v}^{1} \frac{A^u}{g(u)} du\right] dv$$

Równanie (1.10) z dodatkowym warunkiem

(1.11) $$g(o) = a$$

jest równoważne z (1.3),(1.4).

Z oszacowania (1.8) wynika, że równość (1.10) ma również sens dla $\tau = 0$.

Korzystając z postaci całkowej (1.10) (1.11) zagadnienia (1.2) (1.3) udowodnimy:

TWIERDZENIE 1.

Zagadnienie (1.2) (1.3) posiada conajwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód.

Oznaczmy przez g_β rozwiązanie równania (1.3) spełniające warunki początkowe $g_\beta(1) = 1 \quad g_\beta''(1) = \beta$.

Załóżmy, że $\beta_1 > \beta_2$, udowodnimy przez sprowadzenie do niedorzeczności nierówność $g_{\beta_1}(\tau) < g_{\beta_2}(\tau)$ dla $\tau \in [0,1)$.

Jeśli $\tau_0 \in [0,1)$ i $g_{\beta_1}(\tau_0) = g_{\beta_2}(\tau_0)$ to powołując się na warunki $g_{\beta_1}''(1) > g_{\beta_2}''(1)$ i $g_{\beta_1}(1) = g_{\beta_1}(1) = 1$ bez szkody dla ogólności można zażądać aby dla $\tau > \tau_0$ było $g_{\beta_1}(\tau) < g_{\beta_2}(\tau)$.

Przepisując (1.10) i wstawiając $g = g_{\beta_1}$, $\tau = \tau_0$ otrzymujemy:

$$g_{\beta_1}^2(\tau_0) = 1-2\beta_1\int_{\tau_0}^{1}\exp\Big[B\int_{v}^{1}\frac{A^u}{g_{\beta_1}(u)}\,du\Big]dv <$$

$$< 1-2\beta_2\int_{\tau_0}^{1}\exp\Big[B\int_{v}^{1}\frac{A^u}{g_{\beta_2}(u)}\,du\Big]\,dv = g_{\beta_2}^2(\tau_0)$$

a więc $g_{\beta_1}(\tau_0) < g_{\beta_2}(\tau_0)$, co jest sprzeczne z założeniem o punkcie τ_0.

Z powyższych uwag i twierdzenia 0 wynika jednoznaczność rozwiązania zagadnienia (1.2)(1.3).

Zagadnienie postaci:

$$y'' = F(t,y,y') \qquad y(b) = h \qquad y(c) = m$$

były szczegółowo badane w [3][4], uzyskane wyniki wymagały dość specjalnych założeń o funkcji F. Lasota i Opial w pracy [4] udowodnili

TWIERDZENIE.

Założenie i oznaczenia.

$D = (a,b)\times R^2$, $f: D \longrightarrow R$ funkcja ciągła taka, że zagadnienie Cauchy'ego

$$x'' = f(t,x,x') \qquad x(t) = x_0 \qquad x'(t) = x_0'$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie dla każdej liczby $t \in (a,b)$ i dowolnej pary (x_0, x_0').

$$a < t_1 < t_2 < b \qquad x_1, x_2 \in R$$

Teza

Jednoznaczność rozwiązania zagadnienia

$$x'' = f(t, x, x') \qquad x(t_1) = r_1 \qquad x(t_2) = r_2$$

gwarantuje istnienie rozwiązania.

Wróćmy teraz do naszego zagadnienia. Ograniczymy się narazie do przypadku gdy założenia (1.4) przyjmują postać:

$$g(o) = a > 0 \qquad g(1) = 1$$

Wyżej zacytowany wynik i twierdzenie 1 gwarantują istnienie rozwiązania tak postawionego zagadnienia. Trudności jakie napotykamy dalej związane są przede wszystkim z obecnością czynnika ε przy drugiej pochodnej. Zmusza nas to między innymi do osobnego dowodu dla przypadku gdy $g(o) = 0$.

TWIERDZENIE 2.

Zagadnienie (1.2)(1.3) posiada rozwiązanie.

Dowód.

Dla $g(o) = a > 0$ wystarczy powołać się na poprzednie uwagi. Ograniczymy się do sytuacji gdy $g(o) = 0$, jednak dowód, który zaprezentujemy bez trudu przenosi się na przypadek gdy $g(o) = a > 0$.

Przyjmijmy oznaczenia takie jak w twierdzeniu 1. Zauważmy, że $g_0(\tau) \equiv 1$. Wykażemy, że

$$\beta_0 = \sup \{ \beta : g_\beta(0) > 0 \} < +\infty$$

Dla $\beta < \beta_0$ korzystając z (1.10) i podstawiając $\tau = 0$ otrzymujemy:

$$0 \leqslant g_\beta^{\,2}(0) = 1-2\beta \int_0^1 \exp\Big[B\int_v^1 \frac{A^u}{g_\beta(u)}\,du\Big]dv$$

stąd i z (1.8)

$$2\beta\int_0^1 \exp\Big[B\int_v^1 A^u\,du\Big]dv < 1$$

a więc

$$\beta_0 < +\infty$$

Z twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań równania różniczkowego od warunków początkowych [3] wynika, że $g_{\beta_0}(0)=0$.

Uwaga 1.

Twierdzenia 1,2 przenoszą się bez trudu na przypadek gdy warunki (1.4) mają postać

$$g(0) = a \qquad g(1) = b \qquad i \quad a < b$$

Uwaga 2.

Jeśli funkcja g_i $(i = 1,2)$ jest rozwiązaniem równania (1.3) na odcinku (n,m) takim, że:

$$g_i(n) = n_i \qquad g_i(m) = m_0 \qquad i \quad n_1 < n_2 \qquad to$$

$g_1'(n) > g_2'(n)$.

Dowód przeprowadzimy dla przypadku gdy $m = m_0 = 1$ i $n = 0$.

Z rozważań poprzedzających uwagę wynika, że

$$g_1(\tau) < g_2(\tau) \quad dla \ \tau \in (0,1) \quad i \quad g_1'(1) > g_2'(1)$$

Skorzystajmy z tego i przepiszmy (1.9) wstawiając $\tau = 0$ $g = g_i$.

$$g_1(0)g_1'(0) = g_1'(1)\exp\Big[B\int_0^1 \frac{A^u}{g_1(u)}\,du\Big] >$$

$$> g_2'(1)\exp\Big[B\int_0^1 \frac{A^u}{g_2(u)}\,du\Big] = g_2(0)g_2'(0)$$

stąd

$$g_1''(o) > g_2''(o)$$

Analogicznie dowód można przeprowadzić dla przypadku dowolnych n, m, m_0, n_1.

Zbadajmy teraz przepływ cieczy $Q(t)$ przez powierzchnię boczną studni. Przypomnijmy, że

(1.12) $$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2ct+1}} \lim_{s \to a} sf(s)f'(s)$$

gdzie

$$a = \frac{1}{\sqrt{2ct+1}}$$

Jak widać z (1.12) wystarczy zająć się granicą $sff'(s)$ gdy $s \to a$. Korzystając z (1.5) mamy

(1.13) $$sff'(s) = \frac{1}{\ln \frac{1}{a}} \, gg'(\tau)$$

TWIERDZENIE 3.

Jeśli g jest rozwiązaniem zagadnienia (1.3) (1.4) to istnieje granica $\lim_{\tau \to 0} gg'(\tau) = D$ jest ona ciągłą funkcją parametru a.

Dowód.

Pierwsza część tezy wynika w oczywisty sposób z (1.9), druga jest konsekwencją twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań równań różniczkowych od warunków początkowych (w naszym wypadku od parametru β).

W dalszej części będziemy zajmowali się tylko zagadnieniem (1.3)(1.4) w którym warunki brzegowe mają postać $g(o) = 0 \quad g(1) = 1$.

Poprawność definicji wynika z (1.6) (ii)/g jest ściśle rosnąca).

Po zróżniczkowaniu p jednokrotnie i dwukrotnie otrzymujemy odpowiednio

$$(1.21) \qquad p' = -BA^{g}$$

$$(1.22) \qquad pp'' = \ln A \cdot g \cdot p'$$

Z (1.21) i definicji funkcji p wynika:

$$(1.23) \qquad \text{(i)} \;\; p'(0) = -B \quad \text{(ii)} \;\; p(0) = D \quad \text{(iii)} \;\; p'(1) = -BA$$

Wygodnie będzie sprowadzić (1.22) do postaci całkowej. Po przecałkowaniu (1.22) po odcinku $[0, g]$ otrzymujemy

$$(1.24) \qquad p'(g) = p'(0) \exp\Big[\ln A \int_0^{g} \frac{n}{p(n)}\, dn\Big]$$

Powtarzając jeszcze raz to samo dla (1.24) dostajemy

$$(1.25) \qquad p(g) = p(0) + p'(0) \int_0^{g} \exp\Big[\ln A \int_0^{v} \frac{n}{p(n)}\, dn\Big] dv$$

Załóżmy, że $B_1 > B_2$ i $D_1 < D_2$, oznaczmy przez p_j rozwiązania zagadnienia (1.22)(1.23) (i)(ii) ze stałą $B = B_j$. Ponieważ $p_1'(0) = -B_1 < -B_2 = p_2'(0)$ i $D_1 < D_2$ więc $p_1(g) < p_2(g)$ na pewnym odcinku $(0, g_0)$. Pokażemy, że ostatnia nierówność zachodzi na całym odcinku $[0,1]$.

Jeśli $\tilde{g}$ jest najmniejszą liczbą z odcinka $[0,1]$ taką, że $p_1(\tilde{g}) = p_2(\tilde{g})$ to z (1.25) wynika:

$$p_1(\tilde{g}) = D_1 - B_1 \int_0^{\tilde{g}} \exp\Big[\ln A \int_0^{v} \frac{n}{p_1(n)}\, dn\Big] dv <$$

$$< D_2 - B_2 \int_0^{\tilde{g}} \exp\Big[\ln A \int_0^{v} \frac{n}{p_2(n)}\, dn\Big] dv = p_2(\tilde{g})$$

Ostatnia nierówność jest sprzeczna z wyborem punktu $\tilde{s}$ a więc $p_1(s) < p_2(s)$ dla s $[0,1]$.

Przepisując teraz (1.24), ustawiając $\tau = 1$, $p = p_j$ i korzystając z (1.23) (ii) otrzymujemy:

$$-B_jA = p_j'(1) = -B_j \exp\left[\ln A \int_0^1 \frac{n}{p_j(n)}\, dn\right]$$

skąd

$$A = \exp\left[\ln A \int_0^1 \frac{n}{p_j(n)}\, dn\right]$$

Ostatnia równość jest sprzeczna z nierównością $p_1(s) < p_2(s)$ a więc jeśli $B_1 > B_2$ to $D_1 > D_2$.

Druga część tezy wynika z twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań równania różniczkowego (1.3) od parametru B.[3].

Uwaga 3.

$$\lim_{B \to 0} D(B) = \frac{1}{2}$$

Dowód.

Wystarczy zauważyć, że funkcja $D(B)$ jest ciągła w punkcie $c=0$ i rozwiązaniem zagadnienia (1.3) (1.4) gdy $c = 0$, jest $\sqrt{\tau}$.

Zajmiemy się teraz zależnością przepływu $Q(t)$ od czasu. W tym celu wrócimy do zagadnienia (1.1) (1.2).

Tak samo jak to zrobiliśmy dla (1.3)(1.4) sprowadzamy (1.1)(1.2) do postaci całkowej

(1.26) $$sff'(s) = W \exp\left[-c \int_a^s \frac{n}{f(n)}\, dn\right] \text{ gdzie } W = \lim_{s \to a} sff'(s)$$

(1.27) $$sf^2(s) = 2W \int_a^s \exp\left[-c \int_a^v \frac{n}{f(n)}\, dn\right] dv + \int_a^s f^2(v)\, dv$$

Kładąc w (1.27) $s = 1$ otrzymujemy

$$1 = 2W\int_{\alpha}^{1}\exp\left[-c\int_{\alpha}^{v}\frac{n}{f(n)}\,dn\right]dv + \int_{\alpha}^{1} f^{2}(v)\,dv$$

skąd

$$W = \frac{1-\int_{\alpha}^{1} f^{2}(v)\,dv}{2\int_{\alpha}^{1}\exp\left[-c\int_{\alpha}^{v}\frac{n}{f(n)}\,dn\right]dv} \tag{1.28}$$

Korzystając z (1.7) (1.5) dostajemy oszacowanie

$$\sqrt{\frac{s-\alpha}{1-\alpha}} \leq f(s) \leq 1 \tag{1.29}$$

Z (1.28) i (1.29) wynika, że:

$$\frac{\alpha}{2\int_{0}^{1}\exp\left[-\frac{c}{2}v^{2}\right]dv} \leq W \leq \frac{1}{\int_{0}^{1}\exp\left[-\frac{c}{2}v^{\frac{1}{2}}\right]dv}$$

przy czym, oszacowanie od góry jest prawdziwe dla małych α. Przypomnijmy, że

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2ct+1}}W \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2ct+1}}$$

a więc

$$\frac{1}{2ct+1}\,\frac{1}{2\int_{0}^{1}\exp\left[-\frac{c}{2}v^{2}\right]dv} \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2ct+1}}\cdot\frac{1}{\int_{0}^{1}\exp\left[-\frac{c}{2}v^{\frac{1}{2}}\right]dv} \tag{1.30}$$

dla dużych t.

Uwaga 4.

Z twierdzeń 3 i 4 wynika, że przepływ $Q(t)$ zależy w sposób ciągły od poziomu sczerpywania a i zmiennej C, ponadto jest funkcją ściśle rosnącą parametru C.

ROZDZIAŁ II

ZAGADNIENIE NA PÓŁPROSTEJ $[a, +\infty]$

Zmodyfikujemy teraz zagadnienie (1.1)(1.2) tak, aby brzeg swobodny określony był na całym obszarze przepływu. W tym celu warunki brzegowe (1.2) zastąpimy żądaniem:

$$f(a) = 0 \quad f(+\infty) = 1$$

W dalszej części będziemy zajmować się zagadnieniem

(2.1) $ff'' + (f')^2 + \frac{1}{s} ff' = -csf'$ gdzie $c > 0$ $s \in (a, +\infty)$

(2.2) $f(a) = 0 \quad f(+\infty) = 1$

Lemat 2.

Dla każdej liczby a z odcinka $(0,1)$ istnieje stała c_a taka, że zagadnienie (2.1)(2.2) posiada rozwiązanie.

Dowód.

Niech a będzie dowolną, ustaloną liczbą z odcinka $(0,1)$ a f rozwiązaniem zagadnienia (1.1) (1.2) ze stałą $c = 1$. Z twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań równania różniczkowego [3] i nierówności (1.6) wynika istnienie funkcji F określonej na półprostej $(a, +\infty)$, spełniającej równanie (2.1) i równej ~~f~~ f na odcinku $[a, 1]$. Nie trudno pokazać, że spełnione są nierówności

(2.3) $F(s) > 0, \quad F'(s) > 0, \quad F''(s) \leq 0$ dla $s > a$

Wykażemy teraz, że $\lim_{s \to +\infty} F(s) = M < +\infty$.

Funkcja F jako rozwiązanie (2.1) spełnia równanie całkowe

(2.4) $$sF^2(s) = 2W\int_\alpha^s \exp\Big[-\int_\alpha^v \frac{n}{F(n)}\,dn\Big]dv + \int_\alpha^s F^2(v)\,dv$$

gdzie: $W = \lim_{s\to\alpha} sF(s)\,F'(s)$

Z nierówności (2.3) wynika istnienie stałych dodatnich k, l takich, że:

(2.5) $F(s) < ks + l$ dla $s \geq \alpha$

Korzystając z (2.3)(2.4)(2.5) dostajemy oszacowanie

$$M^2 < \frac{2W}{\alpha}\int_\alpha^{+\infty} \exp\Big[-\int_\alpha^v \frac{n}{kn+l}\,dn\Big]dv < +\infty$$

Definiujemy funkcję:

(2.6) $f(s) = M^{-1}F(s)$

Nie trudno sprawdzić, że f jest rozwiązaniem zagadnienia (2.1)(2.2) ze stałą $C = M^{-1}$.

Lemat 3.

Dla każdej liczby dodatniej C istnieje $\alpha_C > 0$ takie, że zagadnienie (2.1)(2.2) gdzie $\alpha = \alpha_C$ posiada rozwiązanie.

Dowód.

Z lematu 1 wynika istnienie liczby $C_{\frac{1}{2}} > 0$ takiej, że zagadnienie (2.1)(2.2) ze stałą $\alpha = \frac{1}{2}$ posiada rozwiązanie f_0.

Definiujemy funkcję

$$f(s) = f_0(Is) \quad \text{gdzie } I = \sqrt{\frac{C}{C_{\frac{1}{2}}}}$$

f spełnia równanie (2.1) i warunki brzegowe: $f\left(\frac{1}{2I}\right)=0$, $f(+\infty)=1$

Wystarczy wybrać [illegible] $= 1$ $\quad \alpha_c = \frac{1}{2I}$

Twierdzenie 5.

Zagadnienie (2.1)(2.2) ma rozwiązanie dla każdej pary liczb dodatnich C α.

Dowód.

Niech C będzie ustaloną liczbą dodatnią. Z lematu 2 wynika istnienie liczby $\alpha_c > 0$ takiej, że zagadnienie (2.1)(2.2) $(\alpha = \alpha_c)$ posiada rozwiązanie $h_{\alpha c}$.
Załóżmy, że $0 < \alpha < \alpha_c$ oznaczmy przez h_γ rozwiązanie równania (2.1) określone na całej półprostej takie, że

$$h_\gamma(\alpha) = 0 \quad i \; h_\gamma(\alpha_c + 1) = \gamma.$$

Tak jak w dowodzie lematu 1 można wykazać, że $h_\gamma(+\infty) < +\infty$ z [illegible] analogicznej do (2.3).

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnimy, że $\lim\limits_{\gamma \to 0} h'_\gamma(\alpha_c+1) = 0$

$$\gamma = h_\gamma(\alpha_c+1) - h_\gamma(\alpha) = h'_\gamma(\xi)\,(\alpha_c+1-\alpha) \geq h'_\gamma(\alpha_c+1)(\alpha_c+1-\alpha)$$

czyli

$$0 < h'_\gamma(\alpha_c + 1) \leq \frac{\gamma}{\alpha_c+1-\alpha}$$

a więc $\quad \lim\limits_{\gamma \to 0} h'_\gamma(\alpha_c + 1) = 0$

Z uwagi 2 wynika, że jeśli $h'_\gamma(\alpha_c+1) < h'_{\alpha c}(\alpha_c+1)$ to $h_\gamma(s) < h_{\alpha_c}(s)$ dla $s > \alpha_c+1$ a tym samym $h_\gamma(+\infty) < 1$.
[illegible] $h_1(+\infty) > 1$, stąd, z ostatniej nierówności i twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych

wynika istnienie takiego β_0 że $h_{\beta_0}(+\infty) = 1$.

Analogiczny dowód można przeprowadzić dla przypadku gdy $c > c_0$.

Dalej przez f oznaczamy rozwiązanie zagadnienia (2.1)(2.2).

Lemat 4.

$$\lim_{s\to+\infty} sff'(s) = 0$$

Dowód.

Całkując równanie (2.1) po odcinku (α, s) otrzymujemy

(2.7) $$sff'(s) = W \exp\left[-c\int_{\alpha}^{s} \frac{n}{g(n)}\,dn\right] \quad \text{gdzie} \quad W = \lim_{s\to\alpha} sff'(s)$$

Ponieważ $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{n}{g(n)}\,dn = -\infty$

Stąd i z (2.7) wynika, że $\lim_{s\to+\infty} sff'(s) = 0$.

Rozważmy teraz różnicę $1 - f(s)$.

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a, lematu 3 i faktu, że f jest rozwiązaniem równania (2.1) otrzymujemy ciąg równości:

$$-f' + \frac{sf'}{1-f} = \frac{sff'}{1-f} = \frac{(sff')'}{-f'}(\bar{s}) = \frac{-\bar{s}^2 f'}{-f'} = \bar{s}^2$$

gdzie $\bar{s} > s$.

Stąd $$-f' + \frac{f'}{1-f} > s.$$

Całkując ostatnią nierówność po odcinku (α, s) dostajemy

$$-f(s) - \ln(1-f(s)) > \frac{s^2-\alpha^2}{2}$$

a stąd

(2.8) $$1-f(s) \leq \exp[-f(s)]\exp\left[-\frac{s^2-\alpha^2}{2}\right]$$

Ostatnia nierówność usprawiedliwia założenie (Wstęp) o dowolności stałej C. Funkcja f dąży w nieskończoności bardzo szybko do 1 i praktycznie w dużym przedziale zmienności s parametr C możemy zaniedbać.

Uwaga 5.

Jeśli f_1 jest rozwiązaniem zagadnienia (2.1)(2.2) ze stałą $C = 1$ to przepływ w chwili t wyraża się wzorem:

$$Q_1(t) = a^2 \lim_{s \to a} f_1(s) f_1^{\prime}(s) \quad \text{gdzie} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

Definiujemy funkcję

$$f_2(s) = f_1(\sqrt{C}\, s) \tag{2.9}$$

Jak łatwo sprawdzić f_2 jest rozwiązaniem (2.1)(2.2) ze stałą C i spełnia warunki brzegowe

$$f_2\left(-\frac{a}{\sqrt{C}}\right) = 0 \qquad f_2(+\infty) = 1$$

Z równości

$$\frac{a}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{2Ct+1}} \tag{2.10}$$

można wyliczyć chwilę t^* w której funkcja f_2 opisuje brzeg studni $\Gamma(t)$.

Jeśli zjawisko zaczerpywania opisane jest funkcją f_2 to przepływ $Q_2(t)$ przez powierzchnię boczną studni w chwili t^* jest związane z $Q_1(t)$ wzorem

$$Q_2(t) = \frac{Q_1(t)}{\sqrt{C}}$$

Związek między t i t^* dany jest równością (2.10).

Dokładnie uwagi pozwalają przy badaniu przepływu ograniczyć się do zagadnienia (2.1)(2.2) ze stałą C = 1.

Oszacujemy teraz prędkość z jaką iloczyn $sf_1 f_1''(s)$ dąży do zera gdy $s \to +\infty$.

f_1 spełnia równanie (2.1) (stała C = 1) a więc

$$-\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{2} + \ln sf_1''(s)\right] = \frac{f_1 - s}{s} \cdot s$$

Całkując obustronnie ostatnią nierówność dostajemy

(2.11) $$\lim_{s\to+\infty}\left(-\frac{s^2-\alpha^2}{2} + \ln\frac{W}{sf_1 f_1''(s)}\right) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{s-f_1}{f_1}\, ds = k < \infty$$

$$W = \lim_{s\to\infty} sf_1 f_1''(s)$$

Z oszacowania (2.8) wynika, że całka po lewej stronie równości (2.11) jest zbieżna.

Z (2.11) łatwo wyliczyć, że

(2.12) $$sf_1 f_1''(s) \sim W e^{-k} \exp -\frac{s^2+\alpha^2}{2}$$

Do obliczeń numerycznych wygodnie jest potraktować $sf_1 f_1''(s)$ jako funkcję p zmiennej f_1. Wtedy p spełnia równanie

(2.13) $$pp'' = 2p' f_1 \qquad p' = -s^2$$

i warunki brzegowe

(2.14) $$p'(0) = -\alpha^2$$

$$p'(1) = 0$$

Dwa opisy zjawiska sorpywania podane w rozdziałach I i II, są jak to widać z (2.8) zasadniczo równoważne.

Fakt bardzo szybkiego dążenia w nieskończoności funkcji f do jedynki powoduje, że dla zastosowań wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania zagadnienia (1.1) (1.2).
Z uwagi 1 wynika, że warunek $f(1) = 1$ można zastąpić żądaniem $f(m) = b$ $(b \ \ (0,1])$, wybór liczby m podyktowany jest dokładnością z jaką chcemy opisać przebieg sczerpywania.
Wszystkie rozważania obu rozdziałów przenoszą się łatwo na przypadek gdy $f(0) = a > 0$ co odpowiada studni ze stałym dodatnim poziomem sczerpywania.

W przypadku płaskim [1] znajomość brzegu swobodnego $\Gamma(t)$ w dowolnej innej chwili, upraszczało to szereg zagadnień, w naszym wypadku niestety tak nie jest, związane jest to obecnością dodatkowego parametru jakim jest promień studni.

W pracy nie zajmowano się zależnością $\Gamma(t)$ i $Q(t)$ od promienia studni, sprawa jest napewno interesująca i wymaga gruntownego zbadania.

LITERATURA

/1/ Zagadnienie leja depresji w płaskiej filtracji nieustalonej

/2/ Schematy różnicowe i metody analityczne w zagadnieniu filtracji ośrodków jednorodnych i niejednorodnych. dla jednej studni.

/1/ , /2/ Prace : Seminarium z teorii filtracji Instytutu Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego

/3/ P. Hartman Ordinary differential equations

/4/ A. Lasota , Z. Opial On the existence and uniqueness of solutions of a boundary value problem for an ordinary second - order differential equation.
Colloqium Mathematicum - 1967 XVIII