Piotr Biler
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wroclawski
e-mail: Piotr.Biler@uwr.edu.pl

Tadeusz Nadzieja (1951–2021)

Tadeusz Nadzieja urodził się w 1951 roku. Szkolne lata spędził w Kłodzku, a studia matematyczne odbył na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego, uzyskując tytuł magistra w 1974 roku na podstawie pracy *O pewnych zagadnieniach teorii filtracji*, która dotyczyła równania opisującego zasięg wód gruntowych wokół kopalni odkrywkowej albo w pobliżu zbiornika wodnego — temat był typowy dla zastosowań równań różniczkowych rozwijanych wtedy na UWr. Ale do doktoratu Tadek rozszerzył swoje zainteresowania na układy dynamiczne i przygotował pod kierunkiem profesora Andrzeja Krzywickiego rozprawę *O pewnych pojęciach stabilności w układach dynamicznych*, obronioną w 1982 roku.

O zagadnieniach matematycznych, którymi się zajmował napisał trochę dokładniej w niedawnym artykule [37] w *Wiadomościach Matematycznych* zatytułowanym *Pół wieku seminarium profesora Andrzeja Krzywickiego – kilka osobistych wspomnień*. Jest to ostatni numer, który współredagował jako redaktor naczelny lub zastępca redaktora naczelnego *WM*. Najpierw terminował u Romana Dudy, potem przez wiele lat sam kierował pracami redakcji, ostatnio przekazał stery Krzysztofowi Ciesielskiemu, wspomagając redakcję swoim doświadczeniem, pomysłami i wyczuciem tematów ważnych dla społeczności matematycznej. O tym wszystkim pisze zresztą Krzysztof. Śmierć zastała Tadka przy pracy nad korektami *WM*, można rzec: na posterunku, w domu, który wybudował w okolicy Kłodzka w 2015 roku, w gabinecie z widokiem na Śnieżnik; tam gdzie planował spędzać czas na emeryturze. Do przejścia na nią we wrześniu

2021 roku zabrakło Mu kilku miesięcy. Jest pochowany na cmentarzu komunalnym przy ul. Dusznickiej w Kłodzku.

Opisanie, jak widzę matematykę uprawianą przez Niego i również z Nim, wymaga równoległego spoglądania na wspomniany tekst [37] i odsyłania do pewnych jego fragmentów.

Na początku swej drogi naukowej Tadek Nadzieja badał specjalne rozwiązania nieliniowego równania filtracji (równania Boussinesqa)

$$u_t = \Delta(u^2). \tag{1}$$

Motywacje do tych badań płynęły z zastosowań w hydrogeologii, gdzie pojawia się problem wyznaczenia zasięgu wód gruntowych w pobliżu kopalń odkrywkowych. Projekty były częściowo finansowane przez Poltegor i Cuprum [37, str. 287]. Matematycznie prowadziło to do specjalnych zagadnień brzegowych dla nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Tego typu problemy, podobnie jak i ogólniejsza teoria słabych rozwiązań nieliniowych równań typu parabolicznego ze zdegenerowaniem, których typowym przedstawicielem jest właśnie równanie Boussinesqa (1) dominowały na szkoleniowo-badawczym seminarium z równań różniczkowych prowadzonym przez Andrzeja Krzywickiego, Hannę Marcinkowską, Adama Rybarskiego i Czesława Ryll-Nardzewskiego, z udziałem grona młodych pracowników Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego i studentów. Ale zainteresowania naukowe Andrzeja Krzywickiego — zawsze solidnie motywowane fizyką — były wtedy też skierowane na teorię gładkich układów dynamicznych i teorię osobliwości odwzorowań gładkich, w skrócie nazywaną teorią katastrof (od nagłych zmian własności różniczkowych czy topologicznych odwzorowań — zmian zależnych od parametrów definiujących te odwzorowania). W ogóle, Andrzej Krzywicki dbał i dba o właściwe fizyczne uzasadnienie zagadnień, które bada i o których wykładał. Bywają to motywacje z mechaniki klasycznej (np. zagadnienie trzech ciał), mechaniki statystycznej (teoria ergodyczna), a najczęściej z hydromechaniki (równania ruchu teorii płynów).

Doktorat Tadeusza Nadziei, uzyskany w 1982 roku, dotyczył właśnie układów dynamicznych, ze sporym ładunkiem własności topologicznych tych obiektów. Wyniki umieszczone w doktoracie zostały opublikowane m.in. w pracach [35] i [36].

W latach 1978–79 zaczynałem chodzić na seminaria prowadzone przez Andrzeja Krzywickiego i wtedy poznałem całe grono matematyków, a także fizyków, z Uniwersytetu Wrocławskiego, Politechniki Wrocławskiej. Kto pojawiał się na tych seminariach — napisał z wieloma szczegółami Tadeusz [37, str. 289]. W moim przypadku przeważyły zainteresowania równaniami różniczkowymi cząstkowymi i, również pod kierunkiem profesora Krzywickiego, napisałem pracę magisterską o pewnym modelu turbulencji pochodzącym od Burgersa (tego od słynnego równania Burgersa $u_t = u_{xx} + uu_x$, ale nie było to równanie, lecz pewne zagadnienie o charakterze nielokalnym).

Już wtedy doceniałem wnikliwe spojrzenie Tadka na zagadnienie matematyczne, którymi ktoś się zajmuje, na motywacje fizyczne i ich poprawność oraz na dążenie do prostoty w opisie i w analizie problemu. Takie cechy uprawiania matematyki wchłanialiśmy na seminarium, głównie dzięki takiemu właśnie spojrzeniu Andrzeja Krzywickiego — naszego Mistrza, jak zaczął nazywać go wtedy Tadek.

Tadek zaczął wówczas współpracę z Andrzejem nad modelami opisującymi oddziaływania elektryczne cząstek, tzw. równaniami Nernsta-Plancka-Debye'a-Hückela. Modele takie, przez fizyków zwane modelami uśrednionego pola (*mean field*), pojawiają się w naturalny sposób w opisie plazmy, elektrolitów i półprzewodników, a szczególne cechy konkretnych zagadnień zakodowane są w warunkach brzegowych wyrażających np. izolowanie brzegu rezerwuaru lub przyłożenie napięć do elektrod. Krzywicki i Nadzieja pokazali kilka interesujących i zaskakujących własności rozwiązań stacjonarnych takich układów, często z warunkami symetrii i z nałożonymi więzami np. na energię całkowitą układu, np. [32, 33, 34].

Ja wtedy byłem raczej kibicem i oglądałem w jaki sposób — pozornie prostymi — narzędziami (twierdzenie Schaudera o punkcie stałym, pomysły z teorii układów dynamicznych) dowodzili oni tych wyników.

Zagadnienie ewolucyjne dla tego typu równań opisuje układ paraboliczno-eliptyczny

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u + u \nabla \varphi), \tag{2}$$

$$\Delta\varphi + u = 0, \tag{3}$$

przy czym u jest gęstością ładunku, a φ potencjałem newtonowskim u. Gdy mamy do czynienia z wieloma rodzajami (co do znaku i wielkości) ładunków $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $a = (a_1, \ldots, a_k)$ i równanie (2) jest wektorowe, równanie Poissona jest zastąpione przez $\Delta\varphi + a \cdot u = 0$. W literaturze układ (2)–(3) był badany np. dla warunków brzegowych Dirichleta, ale nie dla naturalnych warunków $\frac{\partial u}{\partial \nu} + u\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$, wyrażających brak przepływu ładunków przez brzeg obszaru.

Pod wpływem Tadka zająłem się tym zagadnieniem i w 1991 roku pojawiły się pierwsze wyniki, uzyskane dzięki kontaktom we Francji, głównie z Danielle Hilhorst, opisane w [2].

Równocześnie zdaliśmy sobie sprawę, że znacznie ciekawsze i potencjalnie trudniejsze (o tak! w istocie tak się okazało) będą modele opisujące przyciąganie (np. grawitacyjne) cząstek. Wtedy zastępujemy (2) przez równanie

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla \varphi), \tag{4}$$

co zmienia charakter oddziaływań, pozostawiając sposób generowania potencjału przez chmurę cząstek (w gwieździe, w galaktyce, w gromadzie galaktyk) zgodnie z równaniem Poissona (3). Ten sam efekt można uzyskać dla układu $u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla\varphi)$, $\Delta\varphi - u = 0$. Chaotyczny ruch cieplny cząstek (dyfuzja brownowska) jest nadal wyrażony przez wyraz $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

Zajęliśmy się bardzo intensywnie tym i ogólniejszymi modelami. Efektem była seria prac zainicjowana przez [5] z kluczowym udziałem Waldka Hebischa w dowodzie globalnego istnienia rozwiązań w dwuwymiarowym przypadku elektrycznym. Konstrukcja jest oparta na aproksymacjach i pewnej nieliniowej nierówności Sobolewa w krytycznym przypadku zanurzeń Sobolewa, z wykorzystaniem informacji z dodatkowego oszacowania pewnego funkcjonału całkowego od rozwiązań, tzw. entropii. Postać tego funkcjonału $\int (u \log u \mp \frac{1}{2} u\varphi)\, dx$ jest sugerowana przez fizyczne motywacje układu równań.

Najbardziej fascynujące zagadnienie: a co się dzieje gdy cząstki przyciągają się? Czy jest możliwy taki kolaps, jak np. kolaps grawitacyjny gwiazdy (co występowało w stacjonarnym modelu Chandrasekhara z lat 40-tych XX wieku)? — było trudne do ugryzienia. Kolaps tu oznacza zniknięcie regularnych rozwiązań w skończonym czasie; niemożliwość przedłużenia rozwiązań na $[0, t]$ poza pewien moment czasu $T \geq t$.

Wiadomo bowiem z grubsza, jak można pokazywać istnienie rozwiązań (stosownie je przybliżając), ich globalność w czasie (przez odpowiednie oszacowania), ale dowód nieistnienia zwykle jest bardziej skomplikowany ideowo bądź wręcz trikowy. Tadek pokazał to dla rozwiązań z symetrią radialną i dowód pojawił się w [6]. Rozumowanie było niby proste, ale bardzo sprytne, a sprzeczność z założeniem o globalnym w czasie istnieniu rozwiązań — zaskakująca. Potem walczyliśmy o to, aby zrozumieć, co się dzieje w przypadku bez symetrii radialnej. I udało się ([6], [16], [3]), a kluczową wielkością do badania okazał się drugi moment rozwiązania $\int u(x,t)|x|^2\,dx$. Znowu podpowiedziała to fizyka, ale tym razem w sposób raczej zawoalowany. Badane równania pochodzą od modeli kinetycznych, tzn. takich, w których gęstość cząstek $f = f(x,v,t)$ jest poklasyfikowana po położeniach x, czasie t i po prędkościach v tych cząstek. To otworzyło nam z Tadkiem drogę do dalszych badań: i głębiej, i szerzej. Zainteresowanie nowych współpracowników z Francji (Jean Dolbeault, Philippe Laurençot), Hiszpanii (Miguel A. Herrero, Juan José L. Velázquez), Austrii (Peter A. Markowich), Grecji (Dimitrios Tzanetis, Nikos Kavallaris), Chile (Ignacio Guerra) nadało dalszego impetu badaniom. Seria prac [12], [4], [25], ewidentnie inspirowana w wielu wypadkach pytaniami Tadka i Jego intuicjami, pokazała różnorodne zastosowania tych *nielokalnych zagadnień parabolicznych* i metody momentów. Osobliwe zagadnienia z punktowymi ładunkami bądź punktowymi masami badaliśmy w [17], [19]. Nowym efektem jest tu brak jakichkolwiek rozwiązań zagadnienia ewolucyjnego w pewnych przypadkach silnych osobliwości.

Do tych badań dołączyli też nasi młodsi wrocławscy koledzy: Grzegorz Karch, Andrzej Raczyński i Robert Stańczy, co zaowocowało m.in. pracami [8, 9], [24, 25].

Interesującą wycieczkę w stronę fizyki (układy z efektami termicznymi, zgodne z II Zasadą Termodynamiki) odbyliśmy z Andrzejem Krzywickim i Rayem Streaterem (zob. prace [20], [21], [11], [4]). Więcej informacji na ten temat też podał Tadek w artykule [37, str. 296].

Bardzo owocna była nowa interpretacja układów z przyciąganiem, tym razem nie cząstek fizycznych ale mikroorganizmów, jako przykładów równań typu Keller-Segela opisujących biologiczne zjawisko chemotaksji, tzn. skupiania się mikroorganizmów pod wpływem zmian stężenia substancji przez nie same wydzielanej — chemoatraktanta. Chemotaksja jest pewnego rodzaju sposobem wymiany informacji przez bardzo prymitywne organizmy, a układ (3)–(4) jest równoważny z tzw. minimalnym układem Keller-Segela. Badacze chemotaksji, wśród nich liczna grupa Japończyków (Takashi Suzuki, Takasi Senba, Yūki Naito), Gershon Wolansky, początkowo nie spostrzegli związków modeli Keller-Segela z układami pola uśrednionego i kolapsu chemotaktycznego (skupienia się całej populacji w jednym punkcie, co pokazali Willi Jäger i Stephan Luckhaus dla szczególnych rozwiązań radialnych w [29]). W końcu wszyscy zauważyliśmy, że pracujemy nad podobnymi matematycznie równaniami w nieco innych językach.

W 1996 roku Tadeusz Nadzieja habilitował się na podstawie rozprawy *Nielokalne równania eliptyczne i paraboliczne w mechanice ośrodków ciągłych*. Po przejściu Tadka do Politechniki Zielonogórskiej (później uczelnia ta stała się Uniwersytetem Zielonogórskim), intensywność naszych wspólnych poszukiwań matematycznych była mniejsza; Tadek zajmował się mocno sprawami organizacyjnymi w tych uczelniach.

Subtelne asymptotyki dla rozwiązań w przypadku krytycznym całkowitej masy układu oddzielającej obszar istnienia rozwiązań globalnych w czasie od rozwiązań wybuchających w skończonym czasie opublikowane zostały w pracach [8, 9]. Te badania też zostały zainicjowane przez Tadka, który zadał pytanie: a co się może dziać dla $M = 8\pi$? Ale w przypadku radialnej symetrii, bo bez symetrii będzie to trudne (*bezNadziejnie*) zagadnienie.

W 2003 roku zorganizowaliśmy konferencję *Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems* w Centrum Banacha w Będlewie. W 2005 roku tematem podobnej konferencji *Self-Similar Solutions of Nonlinear PDE* były specjalne rozwiązania (niezmiennicze na skalowania) równań i układów równań cząstkowych, ale nie tylko nielokalnych zagadnień parabolicznych. Część przedstawionych tam wyników ukazała się w tomach *Banach Center Publications* [10] i [7]. Oczywiście, wśród pomysłodawców i organizatorów tych spotkań był Tadek.

Na temat układów nielokalnych (funkcjonowanie termistorów, aerotaksja bakterii) i na inne (modele z genetyki, gry różniczkowe) pisał wspólnie z odwiedzającymi Wrocław matematykami ([28, 30]), ze współpracownikami w Zielonej Górze ([27]), jak i z młodszymi kolegami z Opola ([1, 26, 31]).

Sam Tadek barwnie opisał niektóre — po części — humorystyczne sceny z naszych wspólnych zmagań z matematyką, czyli z *walki o oszacowanka* we wspomnianym artykule [37, np. str. 294, 295].

Rozmowy z Nim zawsze inspirowały do badania nowych (albo i starych ale wartych ponownego obejrzenia) zagadnień, w tym pozornie tak prostych jak: dlaczego w równaniu (liniowym!) $u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$ (dla rozwiązań radialnych równania ciepła na kole bez środka $\{0 < r < 1\} \subset \mathbb{R}^2$) nie można zadać dowolnie warunków brzegowych $u(r, 0)$ dla $r = 0$ i $r = 1$? Wielka teoria półgrup Williama Fellera to oczywiście objaśnia, ale w sposób bardzo ogólny i daleki od prostoty. Tadek nalegał, aby zrobić to prostymi argumentami analitycznymi, a bez aparatu probabilistyki. I coś wyszło: [22, 23], por. [37, str. 298].

Tadeusz Nadzieja pracował około 20 lat w Uniwersytecie Wrocławskim, potem w Zielonej Górze, a ostatnio w Opolu. W 2005 roku na wniosek UW otrzymał tytuł profesora.

W każdym z tych uniwersytetów wypromował doktora: Andrzeja Raczyńskiego we Wrocławiu (1999), Ewę Sylwestrzak w Zielonej Górze (2005) i Piotra Knosallę w Opolu (2018). Ich rozprawy doktorskie dotyczyły bardzo różnych zagadnień ze wspólnym mianownikiem: *zagadnienia nielokalne dla równań różniczkowych*. Miał też ogromny wpływ na rozwój intelektualny wielu innych osób. Na młodych ludzi w III L.O. we Wrocławiu, gdzie uczył matematyki w klasie uniwersyteckiej, na studentów i młodszych współpracowników na uczelni. Ceniliśmy Go za Jego entuzjazm matematyczny, chęć dogłębnego zrozumienia rzeczy, które studiował, wypracowania motywacji i znalezienia prostych, eleganckich rozumowań. Takie samo dążenie do zrozumienia istoty matematyki zaszczepiał studentom; czynił to z cierpliwością i wytrwałością.

W pracy angażował się nie tylko w badania naukowe, ale również bardzo dbał o dydaktykę i nie stronił od pełnienia różnorodnych funkcji organizacyjnych: od komisji bibliotecznej, przez obowiązki dziekańskie i dyrektorskie, po wieloletnie zaangażowanie w Polskim Towarzystwie Matematycznym, czy w Komitecie Matematyki PAN.

Tadek chętnie i w naturalny sposób dzielił się pomysłami — i na etapie precyzowania zagadnienia, i w trakcie twardych obliczeń, a gdy przychodziło do formułowania wyniku pragnął, aby był on (wraz z dowodem) możliwie łatwy do zrozumienia. Miał wielu współpracowników i współautorów, również za granicą: w Austrii, Francji, Grecji, Hiszpanii, Izraelu. Z Mistrzem Andrzejem (Krzywickim) napisali 9 prac, po kilka z Grzegorzem Karchem, Andrzejem Raczyńskim, Philippem Laurençot, Jeanem Dolbeault, Marią J. Esteban, Peterem A. Markowichem, Nikosem Kavallarisem, Ignaciem Guerrą — spośród 50 notowanych przez *MathSciNet* (tylko niektóre z nich są zacytowane poniżej w literaturze).

Wielokrotnie realizowaliśmy z nimi wspólne projekty badawcze polskie, francuskie, austriackie, hiszpańskie. Miałem przyjemność wspólnej pracy z Nim nad 20 publikacjami, w tym (chronologicznie najwcześniej) nad książką [13]. Ten projekt, zakończony wydaniem w 1992 roku, był próbą zebrania (i sformułowania w postaci zadań i problemów, albo *problemików*) wielu faktów z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i równań cząstkowych rzadko pojawiających się w standardowych podręcznikach i zbiorach zadań — powstał zbiór takich *zadań z gwiazdką*. Robota była prowadzona w starym stylu, na wstępie jeszcze bez użycia komputera, na fiszkach, z niekończącymi się dyskusjami, co włączyć do kolekcji, a co nie, jak to sformułować, aby wyjaśnić istotę rzeczy a nie zaciemnić.

Tadek zawsze angażował się w projekty ciekawe choć niekoniecznie owocujące publikacjami *za dużą liczbę punktów*, jak to teraz zdarza się w dobie nieustającej ewaluacji, w której brane są pod uwagę punkty, a nie waga uzyskanych wyników.

Nie był fanatykiem matematyki i tylko matematyki. Naukowo interesował się fizyką, a szczególnie mechaniką teoretyczną, kolekcjonował różnorodne monografie i podręczniki na ten temat. Biblioteczka matematyczno-fizyczna w Jego nowym domu kryje skarby dla miłośnika wiedzy i historii nauki. Planowaliśmy wspólnie komentować podejścia różnych autorów do konkretnych problemów mechaniki i liczyłem, że dowiem się od Niego wielu interesujących faktów, podobnie jak wówczas, gdy z pasją opowiadał o historii matematyki i astronomii.

Jego lekko (a momentami bardzo) ironiczne poczucie humoru cenili sobie i cenią przyjaciele i znajomi, bo Tadek przede wszystkim był ogromnie życzliwy dla ludzi. Powiedzenie: emanował dobrocią nie jest tu przesadą; kto Go znał, to wie. Interesował się sprawami ludzkimi i nie było to li tylko zdawkowe zainteresowanie. Mam szczególne doświadczenia nie tylko wytężonej pracy z Nim, ale i czasu spędzonego na wizytach naukowych za granicą, wyjazdach w (niewysokie) góry, czy długich rozmów o wszystkim. Rozmów, w trakcie których entuzjazm dla tego, co cenił przeplatał się ze sceptycyzmem w sprawach, które były niewarte straty czasu lub mało ważne. Bardzo lubił opowiadać o przyrodzie, o roślinach, które posiał, czy posadził w ogrodzie, o spacerach po pięknych okolicach Kłodzka, o ludziach, których poznał i cenił. Podziwialiśmy Jego pasje i zainteresowania spotykając się i we Wrocławiu, i w Zielonej Górze, i w Opolu, i w Jego kłodzkiej *posiadłości*.

Teraz bardzo nam Go brak.

Literatura

[1] W. Bąk, T. Nadzieja, M. Wróbel, *Models of the population playing the rock-paper-scissors game*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **23** (2018), no. 1, 1–11.

[2] P. Biler, *Existence and asymptotics of solutions for a parabolic-elliptic system with nonlinear no-flux boundary conditions,* Nonlinear Analysis T. M. A. **19** (1992), 1121–1136.

[3] P. Biler, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles III,* Colloquium Math. **68** (1995), 229–239.

[4] P. Biler, J. Dolbeault, M. J. Esteban, P. A. Markowich, T. Nadzieja, *Steady states for Streater's energy-transport models of self-gravitating particles*, 37–56, in "Transport in Transition Regimes", N. Ben Abdallah, A. Arnold, P. Degond et al., Eds., *IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, **135**, Springer, New York, 2004.

[5] P. Biler, W. Hebisch, T. Nadzieja, *The Debye system: existence and long time behavior of solutions,* Nonlinear Analysis T. M. A. **23** (1994), 1189–1209.

[6] P. Biler, D. Hilhorst, T. Nadzieja, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles II,* Colloquium Math. **67** (1994), 297–308.

[7] P. Biler, G. Karch, *Self-Similar Solutions in Nonlinear PDE*, Proceedings of a conference held in Będlewo, 2005, Banach Center Publications **74**, 1–255, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2006.

[8] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot, T. Nadzieja, *The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc*, Topol. Methods Nonlin. Anal. **27** (2006), 133–147.

[9] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot, T. Nadzieja, *The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane*, Math. Methods in the Applied Sci. **29** (2006), 1563–1583.

[10] P. Biler, G. Karch, T. Nadzieja, *Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems*, Proceedings of a conference held in Będlewo, 2003, Banach Center Publications **66**, 1–351, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004.

[11] P. Biler, A. Krzywicki, T. Nadzieja, *Self-interaction of Brownian particles coupled with thermodynamic processes*, Reports on Mathematical Physics **42** (1998), 359–372.

[12] P. Biler, Ph. Laurençot, T. Nadzieja, *On an evolution system describing self-gravitating Fermi–Dirac particles*, Adv. Diff. Eq. **9** (2004), 563–596.

[13] P. Biler, T. Nadzieja, *Problems and Examples in Differential Equations*, i-viii, 1–244, *Pure and Applied Mathematics* **164**, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[14] P. Biler, T. Nadzieja, *A class of nonlocal parabolic problems occurring in statistical mechanics,* Colloquium Math. **66** (1993), 131–145.

[15] P. Biler, T. Nadzieja, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles I,* Colloquium Math. **66** (1994), 319–334.

[16] P. Biler, T. Nadzieja, *Growth and accretion of mass in an astrophysical model II,* Applicationes Math. (Warsaw) **23** (1995), 351–361.

[17] P. Biler, T. Nadzieja, *A singular problem in electrolytes theory*, Math. Methods in the Applied Sci. **20** (1997), 767–782.

[18] P. Biler, T. Nadzieja, *Nonlocal parabolic problems in statistical mechanics*, World Congress of Nonlinear Analysts, Athens 1996; Nonlinear Analysis T. M. A. **30** (1997), 5343–5350.

[19] P. Biler, T. Nadzieja, *A nonlocal singular parabolic problem modelling gravitational interaction of particles,* Adv. Diff. Eq., **3** (1998), 177–197.

[20] P. Biler, T. Nadzieja, *Structure of steady states for Streater's energy-transport models of gravitating particles*, Topol. Meth. Nonlinear Anal. **19** (2002), 283–301.

[21] P. Biler, T. Nadzieja, *Global and exploding solutions in a model of self-gravitating particles*, Reports on Mathematical Physics **52** (2003), 205–225.

[22] P. Biler, T. Nadzieja, *Nonexistence of solutions of the heat diffusion problem on a punctured disc*, Monatsh. Math. **159** (2010), 329–334.

[23] P. Biler, T. Nadzieja, *An elementary approach to nonexistence of solutions of linear parabolic equations*, Colloq. Math. **122** (2011), 125–134

[24] P. Biler, T. Nadzieja, A. Raczyński, *Nonlinear singular parabolic equations*, Proceedings of the conference "Reaction–diffusion systems" - Trieste, G. Caristi, E. Mitidieri eds., *LNPAM* **194**, 21–36, Marcel Dekker Inc., New York, 1998.

[25] P. Biler, T. Nadzieja, R. Stańczy, *Nonisothermal systems of self-attracting Fermi–Dirac particles*, 61–78, in: *Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems*, Banach Center Publications, **66** (2004).

[26] M. Bugdoł, T. Nadzieja, *A nonlocal problem describing spherical system of stars*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **19** (2014), no. 8, 2417–2423.

[27] M. R. Dudek, T. Nadzieja, *Age-structured population models with genetics*, From genetics to mathematics, 149–172, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., **79**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009.

[28] I. Guerra, T. Nadzieja, *Convergence to stationary solutions in a model of self-gravitating systems*, Colloq. Math. **98** (2003), 39–47.

[29] W. Jäger, S. Luckhaus, *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 819–824.

[30] N. I. Kavallaris, T. Nadzieja, *On the blow-up of the non-local thermistor problem*, Proc. Edinb. Math. Soc. **50** (2007), 389–409.

[31] P. Knosalla, T. Nadzieja, *Stationary solutions of aerotaxis equations*, Appl. Math. (Warsaw) **42** (2015), 125–135.

[32] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *Some results concerning the Poisson-Boltzmann equation*, Zastos. Mat. **21** (1991), no. 2, 265–272.

[33] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *Radially symmetric Poisson-Boltzmann equation in a domain expanding to infinity*, Math. Methods Appl. Sci. **12** (1990), 405–412.

[34] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *A nonstationary problem in the theory of electrolytes*, Quart. Appl. Math. **50** (1992), 105–107.

[35] T. Nadzieja, *Flows on open manifolds with positively Lagrange stable trajectories*, J. Differential Equations **41** (1981), 313–319.

[36] T. Nadzieja, *Attractors with positively Lyapunov stable trajectories*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 87–90.

[37] T. Nadzieja, *Pół wieku seminarium profesora Andrzeja Krzywickiego – kilka osobistych wspomnień*, Wiadomości Matematyczne **56** (2020), 287–299.