Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 287–299

Tadeusz Nadzieja (Opole)

Pół wieku seminarium profesora Andrzeja Krzywickiego – kilka osobistych wspomnień

W Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego działa nieprzerwanie od prawie pięćdziesięciu lat seminarium z równań różniczkowych. Jestem jednym z tych, którzy byli przy jego narodzinach, i byłem przez wiele lat jego aktywnym uczestnikiem. Postanowiłem podzielić się moimi wspomnieniami. Zapewne w tekście pominąłem kilka istotnych faktów z historii seminarium i być może nie wymieniłem też nazwisk kilku aktywnych jego uczestników. Usprawiedliwia mnie nieco zawodność ludzkiej pamięci oraz ograniczona objętość artykułu. Postanowiłem maksymalnie ograniczyć liczbę pozycji bibliografii. Cytowałem zazwyczaj tylko jeden z pierwszych artykułów autorstwa uczestników seminarium – ten, który zapoczątkował badania danej tematyki. Czytelnicy *Wiadomości Matematycznych* mogą dotrzeć do interesujących ich prac za pomocą baz danych. W trakcie pisania artykułu nie mogłem się zdecydować, czy używać nazwisk, czy też imion matematyków, o których piszę. Na seminarium zwracali się do siebie zazwyczaj po imieniu i ta forma bardziej pasowałoby do stylu, w jakim napisałem moje wspomnienia, ale – aby uniknąć niejednoznaczności i biorąc pod uwagę wygodę czytelników – zazwyczaj używam nazwisk.

W początkach lat siedemdziesiątych zaczynałem pisać pracę magisterską pod opieką Andrzeja Krzywickiego. Jej przedmiotem była analiza nieliniowego zagadnienia brzegowego drugiego rzędu. Moja praca była częścią dużego projektu – teraz powiedziałoby się „grantu" – który był finansowany przez Poltegor. Nie wszystkim zapewne ta nazwa coś mówi. Poltegor (akronim nazwy Polska Technika Górnicza) to przedsiębiorstwo powstałe w latach pięćdziesiątych i świadczące usługi projektowe dla kopalń. W swoim czasie było właścicielem najwyższego budynku we Wrocławiu. Nieruchomość wraz z otaczającą działką kupił Leszek Czarnecki, budynek zburzono i na jego miejscu stoi teraz Sky Tower. Przedsiębiorstwo zostało podzielone i sprywatyzowane. W czasach swojej świetności Poltegor nawiązał współpracę z Romanem Zuberem, pracownikiem Instytutu Matematycznego UWr, i w 1971 roku zlecił mu zorganizowanie zespołu matematyków, którego celem byłoby opracowanie modelu zachowania się tzw. leja depresji. Z grubsza rzecz ujmując, chodziło o to, że kopalnie odkrywkowe bardzo zmieniały poziom wód gruntowych w swoim sąsiedztwie i zleceniodawcom zależało na dokładnym oszacowaniu tych zmian. W tle były procesy sądowe z rolnikami mieszkającymi kilkadziesiąt kilometrów od Bełchatowa i domagającymi się rekompensat za utratę zbiorów z powodu braku wody, który – według nich – był spowodowany działalnością kopalni.

W pracę zespołu zaangażowanych było wielu matematyków, nawet takich, którzy na co dzień byli raczej dalecy od równań różniczkowych i metod numerycznych. Jedną z tego przyczyn były pieniądze. Płacono nieźle. Za swoją pracę magisterską, a udowodniłem w niej istnienie i jednoznaczność rozwiązania dosyć nietypowego zagadnienia brzegowego oraz podałem jego oszacowania, otrzymałem dwie pensje asystenckie. Pieniądze dla matematyków płynęły również z innego źródła. Było nim istniejące do dzisiaj Centrum Badawczo-Rozwojowe Cuprum, pracujące dla przemysłu miedziowego. Finansowało ono badania nieco innych, choć z matematycznego punktu widzenia podobnych, zagadnień. Chodziło głównie o rozchodzenie się zanieczyszczeń wokół zbiorników poflotacyjnych.

W bardzo dużym uproszczeniu można powiedzieć, że różnica między zagadnieniami postawionymi przez Poltegor i Cuprum była taka: zleceniodawców z Poltegoru interesowało, jak zachowa się poziom wód gruntowych, gdy wywiercimy studnię i będziemy pompować z niej wodę, natomiast tych z Cuprum – jak będą rozchodzić się zanieczyszczenia w glebie, gdy będziemy je wlewać do dołu wykopanego w ziemi.

Zespoły matematyków zaangażowanych w zlecenia Cuprum i Poltegoru były liczne. Główne role odgrywali w nich Andrzej Krzywicki, Hanna Marcinkowska, Adam Rybarski, Czesław Ryll-Nardzewski i Roman Zuber. Krzywicki i Rybarski mieli niezwykłą intuicję oraz wiedzę z hydromechaniki i głównie na nich spoczywała odpowiedzialność za konstrukcję odpowiednich modeli matematycznych opisujących procesy hydrologiczne zachodzące w glebie. Marcinkowska i Ryll-Nardzewski czuwali nad matematyczną stroną problemu, a Zuber był odpowiedzialny za część numeryczną zagadnień. Każdy z nich zgromadził wokół siebie młodych pracowników, czasami jeszcze studentów. Problemy matematyczne, które powstały przy okazji zleconych badań, przyczyniły się do rozwoju naukowego paru roczników absolwentów matematyki we Wrocławiu.

Corocznie przedstawiano sprawozdania z osiągniętych wyników. Mam przed sobą sprawozdanie dla Poltegoru. To ryza pożółkłego, rozpadającego się już, jednostronnie zapisanego papieru, podzielona na kilka części. Drukarek ani żadnego edytora tekstu nie było, wszystko pisano na maszynie, a wzory matematyczne wpisywano ręcznie. Większość tekstu dotyczy stosowanych metod numerycznych. Do obliczeń używano maszyny ODRA 1204 o pamięci operacyjnej 64 kilosłów. Stała ona w budynku obecnego Instytutu Matematycznego UWr, zajmowała jedną trzecią piętra i wymagała specjalnej klimatyzacji.

Sprawozdania były analizowane przez ekspertów Poltegoru. Okazało się, że równania różniczkowe zaproponowane przez matematyków dobrze opisywały zachowanie się leja depresji i obliczenia numeryczne ich rozwiązań zostały potwierdzone przez badania terenowe. Współpraca z Poltegorem i Cuprum zakończyła się w 1978 roku.

W czasie trwania projektów z inicjatywy Rylla-Nardzewskiego powołano seminarium, na którym na bieżąco omawiano problemy i postępy prac. W latach 1973–1974 stopniowo wyodrębniło się z niego środowiskowe seminarium z równań różniczkowych, którego prowadzącymi byli Krzywicki i Marcinkowska. Uczestnikami byli pracownicy Uniwersytetu Wrocławskiego, Politechniki Wrocławskiej oraz Akademii Rolniczej. Przeważali matematycy, choć była też grupa inżynierów zainteresowanych hydromechaniką i teorią spalania oraz chemików, specjalistów z teorii kinetyki chemicznej. Na początku trzon stałych uczestników seminarium tworzyli Jan Goncerzewicz, Aleksander Janicki, Wojciech Okrasiński, Krzysztof Tabisz, Jan Śliwa i Adam Szustalewicz. Siebie nie wymieniłem, bo wtedy tylko bywałem na seminarium i dopiero później uczęszczałem na nie regularnie.

Główną tematyką odczytów były wówczas równania filtracji, czyli różne wersje równania Boussinesqa[1] $h_t = \Delta h^2$. Opisuje ono poziom $h(x, y, t)$ wód gruntowych w punkcie (x, y) i w chwili t. Zazwyczaj rozpatrywano je w obszarze radialnie symetrycznym. W pracy [9] wprowadzono równanie całkowe typu Volterry. Rozwiązanie tego równania dobrze przybliżało rozwiązanie zagadnienia Boussinesqa, a ono samo oraz jego uogólnienia były przez wiele lat obszarem badawczym Okrasińskiego oraz Wojciecha Mydlarczyka, który dołączył do seminarium nieco później.

Badania równań filtracji były z dużymi sukcesami kontynuowane przez wiele lat przez grupę matematyków z Akademii Rolniczej i dotyczyły głównie metod numerycznych ich rozwiązywania.

[1] Joseph Valentin Boussinesq (1842–1926) – francuski matematyk i fizyk, wniósł istotny wkład w rozwój hydrodynamiki oraz teorii drgań, światła i ciepła.

Rok 2004. Grono uczestników seminarium wraz z sympatykami. Od lewej Grzegorz Karch, Ewa Obłąk, Andrzej Krzywicki, Krzysztof Stempak, Michał Olech, Dorota Biler, Andrzejek Biler, Andrzej Raczyński, Piotr Biler, Mariusz Kieca, Tadeusz Nadzieja

Z wymienionych wyżej uczestników seminarium tylko Goncerzewicz pozostał wierny problemom matematycznym zapoczątkowanym w projekcie Cuprum. Interesował się głównie zdegenerowanymi równaniami parabolicznymi typu

$$u_t = (\varphi(u))_{xx} + f(x)\psi(u)_x. \tag{1}$$

Funkcje f, φ i ψ są zadane, przy czym pochodna φ' jest nieujemna i zeruje się w pewnym punkcie – tam pojawia się zdegenerowanie dyfuzji. Jego konsekwencją jest brak klasycznych rozwiązań oraz istnienie brzegu swobodnego, będącego granicą obszaru dodatniości rozwiązań. Goncerzewicz badał równanie (1) uzupełnione warunkiem brzegowym i początkowym. Zajmował się problemem istnienia i jednoznaczności oraz własnościami uogólnionych (słabych) rozwiązań w przypadku funkcji nieregularnych – brzegowych i początkowych. W późniejszym okresie zainteresował się równaniem ośrodków porowatych $u_t = \Delta(u^m)$ z $m > 1$. W owym czasie nie wiedzieliśmy, że niemal równocześnie zagadnienia związane z modelowaniem rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń w wodach gruntowych badano w Delft i Leiden. Goncerzewicz nawiązał kontakt z Brianem Gildingiem, wybitnym wychowankiem holenderskiej szkoły nieliniowych równań różniczkowych, zaangażowanym w te badania. Rezultatem ich wieloletniej współpracy jest kilka prac, w których badali rozwiązania równań filtracji wybuchające w skończonym czasie oraz – gdy są globalne – ich asymptotykę (zob. [8]).

Na początku lat osiemdziesiątych dołączył do uczestników seminarium Piotr Biler, a w latach dziewięćdziesiątych – Andrzej Raczyński, Janusz Mierczyński, Henryk Kudela, Wojciech Mydlarczyk, Grzegorz Karch, Izabella Łaba oraz Robert Stańczy. Czasami na posiedzeniach bywało ponad dwadzieścia osób. Grono uczestników zmieniało się, ktoś wyemigrował, zmienił zainteresowania, przybywali też nowi zainteresowani tematyką seminarium – czasami tylko na parę posiedzeń, ale zdarzało się, że dzięki ich wiedzy powstawały wspólne prace.

Jak na każdym seminarium, referowano własne wyniki oraz prace innych autorów. Zaczęto nawiązywać kontakty międzynarodowe, coraz częściej pojawiali się goście z innych ośrodków. Rezultaty badań przekładały się na doktoraty i habilitacje. Mniej uwagi zaczęto zwracać na aspekt aplikacyjny, zagadnienia zaczynały żyć swoim życiem matematycznym. To, że badania nie stoczyły się w przepaść uogólnień bez motywacji fizycznych, jest zasługą Krzywickiego, który mocno hamował takie zapędy. Swoją rolę odgrywali też inżynierowie, którzy czasami rzucali cierpkie uwagi na temat interpretacji przedstawianych przez referenta zagadnień.

Seminarium w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych odgrywało bardzo dużą rolę w środowisku matematyków wrocławskich. Każdy, kto miał jakiś problem lub wynik z równań różniczkowych, prędzej czy później się na seminarium pojawiał. Atmosfera była zawsze życzliwa dla prelegentów, ale też stres przed referatem dotykał każdego. Czasami kilka uwag prowadzących seminarium lub któregoś z uczestników „kładło na łopatki" prelegenta, ale nigdy nie pozostawiano go z problemami. Zawsze pojawiały się propozycje zmian, ulepszeń i w rezultacie nikt po referacie nie czuł się źle i każdy wracał do swojej pracy bogatszy o nową wiedzę, choć bywało, że uboższy o jedną publikację.

W końcu lat osiemdziesiątych pojawiły się tzw. problemy węzłowe, taka chyba nazwa wtedy funkcjonowała. Był to rodzaj grantów finansowanych przez Ministerstwo. Pamiętam spotkanie na uniwersytecie, na którym byli obecni geolodzy, biolodzy, może ktoś z geografów, w każdym razie pracownicy naukowi odczuwający potrzebę współpracy z matematykami. Referowali oni swoje problemy i oczekiwali, że matematycy pomogą im je rozwiązać. Zainteresowało mnie zagadnienie przedstawione przez młodego biochemika, które dotyczyło dosyć szczególnego zagadnienia z teorii elektrolitów. Niewiele trzeba było, aby przekonać Krzywickiego, by przyjrzeć się bliżej problemowi. Szczęśliwym zbiegiem okoliczności w księgarni rosyjskiej w Rynku pojawiły się dzieła zebrane Petera Debye'a[2]. Dodam dla młodszych czytelników, że księgarnia rosyjska była podstawowym źródłem zaopatrzenia w literaturę matematyczną. Rosjanie sami świetnie pisali, nie przejmowali się też prawami autorskimi i tłumaczyli co cenniejsze pozycje światowej literatury matematycznej. Poza tym wydane przez nich książki były dostępne na każdą kieszeń. Nabyłem ładnie wydaną kolekcję prac Debye'a i starałem się coś z nich zrozumieć. Bardzo opornie mi to szło. Z pomocą pospieszył Krzywicki. Parę jego trafnych uwag i spostrzeżeń rozjaśniło mi mocno teorię elektrolitów. W szczególności uświadomił mi, że u podstaw teorii elektrolitów leży mechanika Arystotelesa, a nie Newtona. Nie przyspieszenie jest proporcjonalne do siły, ale prędkość! Ta niby drobna uwaga spowodowała, że zrozumiałem wiele z tajemniczych do tej pory dla mnie zagadnień.

Ogólnie rzecz ujmując, w teorii elektrolitów opisuje się ewolucję gęstości chmury jonów poruszających się pod wpływem wzajemnego oddziaływania coulombowskiego. Wpływ elektrolitu na poruszający się jon można rozłożyć na trzy części: pierwszą, związaną z fluktuacjami cieplnymi, drugą – z tarciem proporcjonalnym do prędkości cząstki i trzecią – z gradientem elektrycznego pola sił wytworzonego przez chmurę jonów. Paraboliczno-eliptyczny układ równań opisujący ewolucję gęstości jonów i potencjału wytworzonego przez nie został wyprowadzony przez Walthera Nernsta[3] i Maxa Plancka w latach osiemdziesiątych XIX wieku, a następnie intensywnie badany przez Debye'a i Ericha Hückela[4] w latach dwudziestych XX wieku.

Pod koniec lat osiemdziesiątych Krzywicki zaproponował, aby rozważać ewolucję chmury cząstek, oddziaływania między którymi nie są typu coulombowskiego, a na przykład typu grawitacyjnego. Na początku wydawało się, że problem ma charakter czysto matematycznej zabawki, bez szans na sensowną interpretację fizyczną. Okazało się, że jest inaczej i zagadnienia tego typu od wielu lat były przedmiotem zainteresowania astronomów.

[2] Peter Debye (1884–1966) – holenderski chemik, laureat nagrody Nobla z chemii w 1936 roku.

[3] Walther Nernst (1864–1941) – fizyk i chemik niemiecki, laureat nagrody Nobla z chemii w 1920 roku, sformułował trzecią zasadę termodynamiki.

[4] Erich Hückel (1896–1980) – niemiecki fizyk i chemik. Pochodził ze znanej rodziny uczonych. Jego dziadek i pradziadek byli znanymi botanikami, a brat Walter, fizyk, profesor uniwersytetu we Wrocławiu, w lutym 1940 roku wystosował list do Ministerstwa Nauki, Wychowania i Oświaty III Rzeszy, w którym wstawił się za profesorami UJ aresztowanymi w ramach akcji Sonderaktion Krakau.

Opis ewolucji gęstości u chmury cząstek poruszających się po wpływem wzajemnego oddziaływania oraz podlegających tarciu i fluktuacji cieplnej można opisać równaniem typu Fokkera–Plancka

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u + X(u)u), \quad u\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Część transportowa jest zadana polem wektorowym $X(u)$ zależnym od u w nielokalny sposób, na przykład poprzez równanie różniczkowe $\pm\Delta\varphi = u$, $X(u) = \nabla u$ lub ogólniej operatorem całkowym $\varphi(x,t) = \int_\Omega K(x,y)u(y,t)\,\mathrm{d}y$, $X(u) = \nabla\varphi$. Jądro K zależy od typu oddziaływań między cząsteczkami. Równanie (2) uzupełniamy warunkiem brzegowym gwarantującym zachowanie masy całkowitej cząstek

$$(\nabla u + uX(u)) \cdot \nu = 0 \tag{3}$$

oraz początkowym

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4}$$

W równości (3) ν jest wektorem jednostkowym prostopadłym do brzegu, a u_0 we wzorze (4) – zadaną funkcją.

Jeśli $X(u) = \nabla \int_\Omega K(x,y)u(y,t)\,\mathrm{d}y$, to stacjonarna gęstość U ma postać boltzmannowską $U = C\exp(-\Phi)$, a stacjonarny potencjał Φ spełnia równanie funkcyjno-całkowe Lane'a–Emdena[5]

$$\Phi(x) = M\left(\int_\Omega \exp(-\Phi(y)\,\mathrm{d}y)\right)^{-1} \int_\Omega K(x,y)\exp(-\Phi(y))\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Parametr M można interpretować jako masę całkowitą chmury cząstek.

Równanie (5) w przypadku oddziaływań coulombowskich sprowadza się do zagadnienia brzegowego dla równania Poissona–Boltzmanna

$$\Delta\Phi = -M\frac{\exp(-\Phi)}{\int_\Omega \exp(-\Phi)}, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Wspólnie z Krzywickim pracowałem nad problemem (6). Wykazaliśmy, że ma on jedyne rozwiązanie (zob. [10]). Pamiętam, że na początku badania szły dosyć opornie. Zauważmy, że zagadnienie (6) jest nielokalne, bowiem po prawej jego stronie występuje całka z funkcji niewiadomej. Fakt ten rodzi problemy, które nie występują w zagadnieniach lokalnych, tzn. takich, w których po prawej stronie występuje wartość funkcji niewiadomej w danym punkcie.

[5] Jonathan Homer Lane (1819–1880) – amerykański astrofizyk, wyznaczył teoretycznie związki między temperaturą, ciśnieniem i gęstością we wnętrzu Słońca. Jacob Robert Emden (1862–1940) – szwajcarski astrofizyk, opracował model zachowania się kul gazowych pod wpływem własnej grawitacji.

Pamiętam, że przez wiele dni nie mogliśmy „dobrać się" do zagadnienia, wszystkie pomysły i metody zawodziły, nierówności zachodziły w odwrotną stronę, założenia znanych nam twierdzeń nie były w interesującym przypadku spełnione, jednym słowem – katastrofa. Był lipiec, postanowiłem na parę dni pojechać na wieś i oderwać się od problemu. Poinformowałem o tym Krzywickiego. Byłem już w pociągu i do odjazdu brakowało kilku minut, gdy zauważyłem idącego peronem Krzywickiego, prowadzącego swój bardzo charakterystyczny rower. Piszę o tym, bowiem najpierw rzucił mi się w oczy właśnie rower, a później prowadząca go osoba. Okazało się, że Krzywicki poszukiwał mnie w pociągu, aby przekazać mi swoje ostatnie przemyślenia spisane na kartkach. Wziąłem kartki, pociąg ruszył, a ja zacząłem je studiować. W efekcie ich lektury już w okolicach Brzegu miałem zamiar wysiąść z pociągu i wrócić do Wrocławia, aby kontynuować nasze badania. Dojechałem jednak do celu, ale po trzech dniach byłem z powrotem we Wrocławiu.

Problem niestacjonarny w przypadku oddziaływań coulombowskich został rozwiązany w pracy [2]. Wykazano w niej, że w przypadku dwuwymiarowym rozwiązania istnieją, są jednoznaczne i dążą do rozwiązania stacjonarnego. Podobny rezultat otrzymano w trójwymiarowym przypadku, przy założeniu, że warunki początkowe są dostatecznie blisko rozwiązań stacjonarnych. Jednym ze współautorów pracy jest Waldemar Hebisch, który nie był uczestnikiem seminarium, ale zainteresowało go zagadnienie, nad którym pracowaliśmy z Bilerem i dał się wciągnąć do współpracy. On też jest autorem kluczowego oszacowania potrzebnego do dowodu zasadniczego twierdzenia.

Po uporaniu się z głównymi problemami zagadnienia opisującego oddziaływania coulombowskie zaczęliśmy badać przypadek oddziaływań grawitacyjnych. Jest on o wiele bardziej złożony i ciekawszy z matematycznego punktu widzenia. Okazało się, że istnienie rozwiązania stacjonarnego zależy od geometrii obszaru i parametru M, zazwyczaj nie ma też jednoznaczności rozwiązań (zob. [11]).

Brak rozwiązań stacjonarnych przeważnie prowadzi do istnienia rozwiązań wybuchających zagadnienia niestacjonarnego. Można było się spodziewać, że takie zjawisko ma też miejsce w przypadku równań opisujących ewolucję układów z oddziaływaniami newtonowskimi między cząsteczkami.

Mocno zaangażowaliśmy się z Bilerem w wykazanie istnienia rozwiązań wybuchających. Wiedzieliśmy, że jakaś norma rozwiązania powinna w skończonym czasie dążyć do nieskończoności. Pracowaliśmy nad zagadnieniem radialnie symetrycznym w kuli jednostkowej, które sprowadzało się w przypadku n-wymiarowym do jednego równania z odpowiednio zadanymi warunkiem brzegowym i początkowym

$$Q_t = n^2 y^{2-\frac{2}{n}} Q_{yy} + n\sigma_n^{-1} Q Q_y, \tag{7}$$

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(1,t) = M, \quad Q(y,0) = Q_0(y) \geqslant 0, \tag{8}$$

przy czym Q_0 jest zadaną funkcją, a σ_n polem sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Funkcja Q ma interpretację fizyczną – jest to masa cząstek w kuli o promieniu y. Równanie (7) jest nieliniowe, ale nie w tym problem – główny kłopot to zerujący się współczynnik przy drugiej pochodnej, przez co równanie nie jest jednostajnie paraboliczne. W badania nad naszym zagadnieniem zaangażowała się Danielle Hilhorst z Paris Orsay, częsty gość we Wrocławiu. Problem istnienia rozwiązań stacjonarnych, globalnych i wybuchających zagadnienia (7–8) został prawie zadowalająco rozwiązany w pracy [3]. Później wspólnie z Bilerem napisaliśmy jeszcze kilka artykułów na jego temat.

Początki naszego zainteresowania istnieniem rozwiązań wybuchających w przypadku nieradialnie symetrycznym były trudne, problem nie poddawał się żadnym znanym nam metodom.

Był upalny czerwiec, początek lat dziewięćdziesiątych, zlecono mi prowadzenie kursów dla maturzystów. Zajęcia odbywały się w budynku gmachu głównego uniwersytetu, zaplanowano je nawet w święto Bożego Ciała. Wychodzę po lekcjach przed budynek i widzę, że obok pomnika szermierza stoi Piotr i czeka na mnie z jakimiś „oszacowankami", zawsze używał takiego zdrobnienia. Siedzieliśmy na ławce przed gmachem głównym uniwersytetu i usiłowaliśmy jakoś wykorzystać nową wiedzę, w tle słychać było śpiewy uczestników procesji. O ile pamiętam, żadnych sukcesów w ten świąteczny dzień nie osiągnęliśmy.

Po pewnym czasie Biler wykorzystał swoje doświadczenie w badaniu równania Schrödingera i zaproponował użycie tzw. metody momentów, a dokładniej chodziło o ewolucję drugiego momentu gęstości. Pomysł zdał egzamin i udało się wykazać, że w przypadku dwuwymiarowym, jeśli rozpatrujemy problem w obszarze gwiaździstym, na przykład w dysku, to dla mas większych od 4π istnieją rozwiązania wybuchające, tzn. takie, które są określone tylko na skończonym odcinku czasu $[0, T)$ i pewne normy rozwiązania dążą do nieskończoności, gdy czas dąży do T – można rzec, że mamy do czynienia z pewnego rodzaju kolapsem grawitacyjnym. W pracy [1] pojawiły się po raz pierwszy normy Morreya[6], w języku których sformułowano warunki na istnienie wybuchów i jednoznaczność rozwiązań.

[6] Charles Bradfield Morrey Jr. (1907–1984) – amerykański matematyk, autor znaczących rezultatów w zakresie równań różniczkowych cząstkowych i rachunku wariacyjnego.

Chyba w połowie lub końcu lat dziewięćdziesiątych Biler natknął się na pracę angielskiego fizyka Raymounda Streatera[7], który wyprowadził równanie opisujące nie tylko ewolucję gęstości chmury cząstek, lecz również jej temperatury. W naszych modelach temperatura była ustalonym parametrem. Dosyć szybko nawiązaliśmy z nim kontakt. Bywał na seminarium we Wrocławiu, uczestnicy seminarium jeździli do Londynu. Mieszkałem u niego w domu przez tydzień, a później on gościł u mnie w Zielonej Górze. Mieliśmy dużo czasu na dyskusje, ale przyznam, że trudno było znaleźć wspólny punkt widzenia. Ray patrzył na nasze zagadnienia z punktu widzenia fizyki i cały czas twierdził, że żadnych wybuchów rozwiązań nie ma, bowiem trzeba, przy dużej gęstości materii, uwzględnić efekty kwantowe. I tutaj nasze drogi się rozchodziły. Pamiętam jego opinię na temat równania Naviera–Stokesa. Twierdził, że kłopoty z nim związane biorą się z faktu, że problem jest źle postawiony. Wprowadzał modyfikacje do tego równania, ale nie bardzo zrozumiałem, w jaki sposób mogłyby one uprościć matematykom zagadnienie.

Równania wyprowadzone przez Streatera mają wyjątkowo skomplikowaną postać i nie wiem, czy ktoś do tej pory wykazał istnienie ich rozwiązań. My zajęliśmy się rozwiązaniami stacjonarnymi, które spełniały badane przez nas wcześniej równania. Postawiliśmy sobie jednak ambitniejsze zadanie – zbadać rozwiązania stacjonarne przy zadanej energii całkowitej, tj. sumy energii potencjalnej i cieplnej. Problem okazał się ciekawy i udało się zaangażować w jego badanie paru świetnych matematyków. Rezultatem jest praca [5].

Współpraca z grupą astronomów z Tuluzy zaowocowała badaniem ewolucji chmury cząstek poruszających się pod wpływem wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego, przy czym zamiast liniowego związku między ciśnieniem i gęstością rozpatrujemy innego rodzaju relacje, na przykład Fermiego–Diraca. Prowadzi to do dosyć skomplikowanych problemów, część z nich została rozwiązanych w pracy [6, str. 61–78].

Równania ewolucji gęstości chmur wzajemnie oddziałujących cząstek są bardzo podobne do równań chemotaksji. Przypomnijmy, że opisują one gęstość kolonii bakterii oraz substancji wytwarzanej przez nie, tzw. chemoatraktanta. Bakterie poruszają się w kierunku jego maksymalnego stężenia. Różne modele opisujące zjawisko chemotaksji są przedmiotem zainteresowania w wielu czołowych ośrodkach matematycznych. We Wrocławiu bardzo zaangażował się w tę tematykę Biler. Dosyć szybko dołączył do niego Karch oraz jego doktoranci. Stworzyli bardzo silny zespół, a do współpracy udało im się namówić

[7] Raymound Streater (ur. 1936) – angielski fizyk, obecnie emerytowany profesor matematyki stosowanej w King's College London. Znany głównie jako współautor z A. S. Wightmanem monografii na temat kwantowej teorii pola.

paru matematyków zagranicznych i polskich, nawet dosyć dalekich od równań różniczkowych, ale dysponujących wiedzą z analizy harmonicznej i tzw. siłą dowodową, bardzo przydatną w badaniu wyjątkowo złożonych zagadnień. Metody badawcze zahaczały o teorię przestrzeni Morreya, analizę funkcjonalną i harmoniczną. Ja już nie brałem w tych badaniach aktywnego udziału, a wyniki nie jest łatwo opisać bez odwoływania się do skomplikowanych pojęć, które nie są powszechnie znane. Świetnym źródłem informacji o zagadnieniach chemotaksji jest monografia [7] oraz obszerna literatura w niej zawarta.

W latach dziewięćdziesiątych Biler i Karch wielokrotnie przebywali na Case Western University w Cleveland, gdzie współpracowali z Wojborem Woyczyńskim, byłym pracownikiem Instytutu Matematycznego UWr i wychowankiem Kazimierza Urbanika. Przywieźli stamtąd nową tematykę badań. W rozważanych do tej pory zagadnieniach na wrocławskim seminarium operator Laplace'a zastąpili laplasjanem fraktalnym Δ^s. Jest to operator nielokalny działający na funkcjach pewnej klasy i zdefiniowany za pomocą transformaty Fouriera

$$\mathcal{F}(\Delta^s u)(x) = |x|^s \mathcal{F}u(x)$$

lub przez całkę singularną

$$(-\Delta)^s u(x) = C\, P.V.\int_{\mathbf{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\, \mathrm{d}y,$$

przy czym C jest pewną stałą, a $P.V.$ oznacza, że chodzi o wartość całki w sensie wartości głównej.

Formalna definicja ułamkowego laplasjanu nie wyjaśnia, dlaczego we wspomnianych wcześniej równaniach zastąpiono laplasjan jego wersją ułamkową. Jeśli opisujemy ewolucję gęstości chmury cząstek poruszających się ruchem Browna, to ewolucja gęstości tych cząstek opisana jest klasycznym równaniem ciepła. Natomiast jeśli dopuścimy możliwość dużych skoków tych cząstek, to w równaniu ciepła laplasjan zastępujemy laplasjanem ułamkowym.

Okazuje się, że wiele procesów w przyrodzie wymaga w ich modelowaniu użycia właśnie laplasjanu ułamkowego, co prowadzi do nowej klasy zagadnień matematycznych. Pojawiły się one na przykład w pracy [4] i stały się przedmiotem badań Bilera, Karcha i skupionej wokół nich grupy młodych matematyków. Przyznam, że długo nie mogłem przekonać się do nowego obszaru badań, choć przez wiele godzin dyskutowałem z ich inicjatorami na temat użyteczności nowego aparatu matematycznego. Być może mój sceptycyzm jest związany z nikłą znajomością procesów stochastycznych, a właśnie procesy Levy'ego prowadzą do ułamkowych laplasjanów. Grupa uznająca celowość badań zagadnień z nowego typu nielokalnymi laplasjanami tworzy teraz większość na seminarium, a jej dorobek jest znaczny.

Wspomniałem o mojej nikłej znajomości procesów stochastycznych. Okazało się, że w rezultacie tej niewiedzy powstała elementarna praca zawierająca wynik, który mógłby się znaleźć w każdym podręczniku z równań cząstkowych.

W jednej z naszych wspólnych prac Biler użył argumentu pochodzącego z teorii procesów stochastycznych (tzw. test Fellera). Artykuł się ukazał, ale byłem zdania, że powinniśmy poszukać dowodu opartego tylko na argumentach analitycznych. Po kilkunastu miesiącach wykazaliśmy metodami elementarnymi, że równanie ciepła na dysku dwuwymiarowym bez środka z warunkami brzegowymi (1 na brzegu koła i 0 w środku) nie ma rozwiązań, nawet lokalnych w czasie. Później uogólniliśmy ten rezultat na liniowe równania paraboliczne.

Wydaje mi się, że wymieniłem podstawowe zagadnienia będące przedmiotem zainteresowań uczestników seminarium. Powstawały również prace poza głównym nurtem badań, na przykład z teorii termistorów, równania Boltzmanna i Naviera–Stokesa. Ostatnimi laty Karch nawiązał współpracę z grupą matematyków zajmującą się modelowaniem zjawisk biologicznych. Zaowocowało to powstaniem kilku prac i otworzyło nowe obszary badawcze.

Na koniec parę zdań o zwyczajach panujących na seminarium. Prelekcje były dwugodzinne, tzn. dwa razy po 45 minut z przerwą piętnastominutową. Po wykładzie wszyscy spotykali się w jednym pokoju. Czasami tłok był wielki, na szczęście były to właściwie dwa pokoje obok siebie ze wspólnymi drzwiami. W jednym, gdzie przebywała większość, zazwyczaj była butelka niezłego wina i mnóstwo pączków, które kupował Krzywicki w cukierni „Pod trumienką". W rzeczywistości na jej szyldzie widniał napis „Cukiernia", ale sąsiadowała z zakładem pogrzebowym i taka jej nazwa przyjęła się powszechnie we Wrocławiu. Dyskutowano o różnych sprawach, komentowano bieżące wydarzenia, koncerty, książki, dzielono się nową wiedzą nabytą od ostatniego posiedzenia. Jeśli ktoś chciał podyskutować o szczegółach referatu, miał do dyspozycji drugi pokój, w którym nie było tłoku. Tak było w XX wieku. Później uczestnicy seminarium zaczęli nabywać samochody, więc o lampce wina musieli zapomnieć; niektórzy musieli zacząć dbać o zdrowie, więc coraz trudniej było też skonsumować wszystkie pączki. Rodzinne i służbowe obowiązki sprawiły, że spotkania były krótsze niż wcześniej. Na seminarium coraz częściej goszczą zagraniczni stażyści i większość odczytów jest w języku angielskim. Spotkania po seminarium przybrały też, ze względu na ich obecność, nieco inny charakter.

Obecnie prowadzącymi seminarium są Andrzej Krzywicki, Piotr Biler, Grzegorz Karch i Miłosz Krupski – Mistrz (tak nazywamy profesora Krzywickiego), jego uczeń, wnuk i prawnuk naukowy.

Podziękowanie. Dziękuję P. Bilerowi, J. Goncerzewiczowi oraz G. Karchowi za uwagi, które uwzględniłem w ostatecznej wersji artykułu.

Bibliografia

[1] P. Biler, T. Nadzieja, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction od particles*, Colloq. Math. 66 (1994), 319–334.

[2] P. Biler, W. Hebisch, T. Nadzieja, *The Debye system: existence and large time behavior of solutions*, Nonlinear Anal. 23 (1994), 1189–1209.

[3] P. Biler, D. Hilhorst, T. Nadzieja, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II*, Coll. Math. 67 (1994), 297–308.

[4] P. Biler, G. Karch, W. Woyczynski, *Multifractal and Lévy conservation laws*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), 343–348.

[5] P. Biler, J. Dolbeault, M. J. Esteban, P. A. Markowich, T. Nadzieja, *Steady states for Streater's energy-transport models of self-gravitating particles*, IMA Vol. Math. Appl., t. 135, Springer, New York 2004, 37–56.

[6] P. Biler, T. Nadzieja, R. Stańczy, *Nonisothermal systems of self-attracting Fermi––Dirac particles*, [w:] *Nonlocal elliptic and parabolic problems* (P. Biler, G. Karch, T. Nadzieja, red.), t. 66, Banach Center Publ. 2004, 61–78.

[7] P. Biler, *Singularities of solutions to chemotaxis systems*, De Gruyter, Berlin 2020.

[8] B. H. Gilding, J. Goncerzewicz, *Localization of solutions of exterior domain problems for the porous media equation with radial symmetry*, SIAM J. Math. Anal. 31 (2000), 862–893.

[9] J. Goncerzewicz, H. Marcinkowska, W. Okrasiński, K. Tabisz, *On the percolation of water from a cylinder reservoir into the surrounding soil*, Zastosow. Mat. 16 (1978), 249–261.

[10] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *Poisson–Boltzmann equation in* $\mathbb{R}^3$, Ann. Polon. Math. 54 (1991), 265–272.

[11] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *A note on the Poisson–Boltzmann equation*, Zastosow. Mat. 21 (1993), 591–595.

Tadeusz Nadzieja
Katedra Matematyki
Uniwersytet Opolski
tnadzieja@uni.opole.pl