



TADEUSZ NADZIEJA (Wrocław)

Indywidualne Twierdzenie Ergodyczne z topologicznego punktu widzenia

Celem artykułu jest spojrzenie na topologiczne aspekty Indywidualnego Twierdzenia Ergodycznego. Twierdzenie to mówi, że *jeśli Φ jest przekształceniem przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathcal{E}, \mu)$ zachowującym miarę μ i $f \in L_1(X)$, to zbiór $Q(\Phi, f)$ tych elementów $x \in X$, dla których ciąg średnich czasowych $S_N f(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\Phi^i(x))$ jest zbieżny, gdy $N \rightarrow \infty$, ma miarę 1. Przez Φ^i oznaczyliśmy i -krotne złożenie przekształcenia Φ . Zachowywanie miary μ przez odwzorowanie Φ oznacza, że $\mu(A) = \mu(\Phi^{-1}(A))$ dla każdego $A \in \mathcal{E}$.*

Jeśli założymy dodatkowo, że X jest przestrzenią metryczną, Φ przekształceniem ciągłym tej przestrzeni w siebie, a f funkcją ciągłą, to naturalne jest pytanie o to, jak duży jest zbiór $Q(\Phi, f)$ z topologicznego punktu widzenia.

Chcemy zwrócić uwagę na interesujący kontrast między miarowym i topologicznym aspektem zagadnienia. Z jednej strony prawie wszystkie warunki początkowe prowadzą do zbieżnych średnich czasowych, a z drugiej strony typowe — z punktu widzenia topologii — warunki początkowe mogą dawać, w pewnym sensie, maksymalnie rozbieżne średnie.

Początki problemu istnienia granic średnich czasowych sięgają połowy XIX wieku.

Z twierdzenia Liouville'a [Sz] wynika, że potoki generowane układami hamiltonowskimi mają miarę niezmienniczą. W pracy [B] z 1868 roku L. Boltzmann podał fizyczną interpretację tej miary. Można uznać, że był to rok narodzin teorii ergodycznej. Używając współczesnej terminologii problem rozpatrywany w tej pracy można przedstawić następująco.

Dany jest układ n jednakowych cząstek materialnych modelujących gaz zawarty w naczyniu $V \subset \mathbb{R}^3$. Dla uproszczenia zakładamy, że oddziałują one między sobą tylko w momencie zderzenia (wymieniają się prędkościami) i odbijają się sprężysto od ścianek naczynia. Układ ten jest deterministyczny, tzn. zadanie położenia $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q_i \in \mathbb{R}^3$, i prędkości $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}^3$, wszystkich cząstek w chwili $t = 0$ wyznacza

jednoznacznie całą ewolucję układu, czyli położenia $q(t)$ i prędkości $v(t)$ w dowolnej chwili $t \in \mathbb{R}$. Przestrzenią fazową jest zbiór położeń, czyli pewien podzbiór V^n , pomnożony po kartezjańsku przez przestrzeń prędkości $\mathbb{R}^{3n}$. Ewolucja układu zadana jest grupą $\{\varphi_t\}$ przekształceń mierzalnych przestrzeni fazowej w siebie, $\varphi_t(q, v) = (q(t), v(t))$.

Zadanie prędkości początkowych ustala energię całkowitą układu, która wobec założenia o braku oddziaływań między cząsteczkami, redukuje się do energii kinetycznej $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2$ (przyjeliśmy, że masy cząstek równe są 1). Energia E jest zachowywana w czasie. Jeśli warunek początkowy (q, v) leżał na hiperpowierzchni Σ_{E_0} w przestrzeni fazowej wyznaczonej równością $E = E_0$, to $\varphi_t(q, v)$ należy do tej hiperpowierzchni dla każdej chwili t . Potok $\{\varphi_t\}$ zachowuje miarę Lebesgue'a m na Σ_{E_0} , tzn. $m(A) = m(\varphi_t(A))$ dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset \Sigma_{E_0}$ i każdej chwili t . Istotne jest też dla dalszych rozważań, że $m(\Sigma_{E_0}) < \infty$. Dalej będziemy zawsze zakładać, że wszystkie miary są unormowane.

Boltzmann we wspomnianej pracy podał następującą fizyczną interpretację miary m : *średni czas przebywania trajektorii prawie każdego punktu $x = (q, v) \in \Sigma_{E_0}$ w zbiorze $A \subset \Sigma_{E_0}$ jest równy mierze tego zbioru.*

Interpretacja ta prowadzi do tego co dzisiaj nazywamy hipotezą ergodyczną: *Jeśli A jest podzbiorem borelowskim Σ_{E_0} , to dla prawie każdego punktu $x \in \Sigma_{E_0}$ mamy $m(A) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_A(\varphi_s(x)) ds$, gdzie χ_A jest funkcją charakterystyczną zbioru A .*

Na przełomie wieku hipoteza ta była przedmiotem zainteresowania wielu matematyków i fizyków. Znane są różne, nie zawsze równoważne, jej sformułowania. Obecny stan badań nad nią przedstawiony jest w [S], [S-S]. Historia idei Boltzmanna i ich wpływu na rozwój teorii ergodycznej i, ogólniej, teorii prawdopodobieństwa opisana jest w [P].

A priori nie jest jasne, czy granica średnich czasowych $S_T(x) := \frac{1}{T} \int_0^T \chi_A(\varphi_s(x)) ds$ istnieje, a jeśli tak, to czy jest równa $m(A)$ dla prawie wszystkich x . Argumenty użyte przez Boltzmanna odwoływały się do fizycznych intuicji. W temperaturze pokojowej cząstki gazu poruszają się z prędkością około 500 metrów na sekundę i w każdej sekundzie w 1 cm^3 następuje około 10^{27} zderzeń. Trajektoria naszego układu przebiega bardzo szybko po całej hiperpowierzchni stałej energii i rozłożona jest na niej równomiernie. Wydaje się zatem sensownym założenie, że czas przebywania w zbiorze $A \subset \Sigma_{E_0}$ jest równy mierze tego zbioru.

Matematyczny dowód istnienia granic średnich czasowych podał w latach 30-tych G. Birkhoff. W kilka lat później E. Hopf i A. Chinczyn udowodnili, że w miejsce funkcji charakterystycznej zbioru A można podstawić dowolną funkcję całkowalną i otrzymana w ten sposób średnia również będzie zbieżna. Wykazali w ten sposób, dla potoków zachowujących miarę następujące twierdzenie

INDYWIDUALNE TWIERDZENIE ERGODYCZNE. Załóżmy, że (X, Ξ, μ) jest przestrzenią probabilistyczną i $\{\varphi_t\}$ potokiem na X zachowującym miarę μ , tzn. $\mu(A) = \mu(\varphi_t(A))$ dla każdego zbioru mierzalnego A i każdego $t \in \mathbb{R}$. Wtedy dla każdej funkcji $f \in L_1(X)$ istnieje $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt =: f^*(x)$ dla μ -prawie wszystkich $x \in X$. Ponadto $f^* \circ \varphi_t = f^*$ i $\int_X f = \int_X f^*$.

Przypomnijmy, że miarę niezmienniczą nazywamy *ergodyczną* względem grupy przekształceń $\{\varphi_t\}$, jeśli jedynymi mierzalnymi zbiorami niezmienniczymi (tzn. takimi, że $A = \varphi_t(A)$ dla każdego t) są zbiory miary pełnej i zerowej. Z powyższego twierdzenia wynika, że hipoteza ergodyczna jest w istocie pytaniem o ergodyczność miary Lebesgue'a. Jeśli bowiem A jest zbiorem niezmienniczym, to $\chi_A^*(x) = 1$ dla $x \in A$ i $\chi_A^*(x) = 0$ dla $x \notin A$, a więc jedynymi zbiorami niezmienniczymi są zbiory miary 0 lub miary pełnej. Jeśli m jest miarą ergodyczną, to jedynymi funkcjami niezmienniczymi są funkcje stałe, a więc $\chi_A^* = \text{const} = \int_{\Sigma_A} \chi_A = m(A)$. Hipotezę ergodyczną Boltzmanna można więc sformułować następująco: *miara Lebesgue'a m na Σ_{E_0} jest miarą ergodyczną.*

Ruch n cząstek w naczyniu jest przykładem procesu deterministycznego, ale nieprzewidywalnego lub, jak to ujął J. C. Maxwell, deterministycznego w teorii, ale niedeterministycznego w praktyce. Wynika to nie tylko z tego, że przestrzeń fazowa ma bardzo duży wymiar, ale również z faktu, że małe zmiany warunków początkowych powodują w krótkim czasie duże zmiany w przebiegu trajektorii.

Jednym z największych sukcesów teorii układów dynamicznych w ostatnim ćwierćwieczu było odkrycie i zbadanie potoków i dyfeomorfizmów określonych na przestrzeniach fazowych niskiego wymiaru, których przebieg trajektorii jest bardzo czuły na warunki początkowe.

Pionierską była praca E. Lorenza [L], w której podał on przykład układu równań różniczkowych w $\mathbb{R}^3$ posiadającego tę cechę. Układ ten modelował przebieg procesów atmosferycznych i jego duża niestabilność względem warunków początkowych wyjaśniała problemy związane z postawieniem wiarygodnej krótkoterminowej prognozy pogody. W ostatnich latach pojawiło się wiele prac poświęconych układom dynamicznym (potoki, dyfeomorfizmy) charakteryzujących się podobną cechą co model Lorenza.

Matematyczne modele procesów deterministycznych zbudowane są na ogół według następującego schematu. Dana jest przestrzeń fazowa X (rozmaitość, przestrzeń metryczna), będąca zbiorem parametrów charakteryzujących proces fizyczny, następnie potok fazowy $\{\varphi_t\}$ na X opisujący jego ewolucję i funkcja rzeczywista f na X . Funkcję f można interpretować jako pewną mierzalną fizycznie wielkość, zatem $f(\varphi_t(x))$ jest wartością pomiaru w chwili t procesu, który w chwili $t = 0$ był w stanie x . Załóżmy, że przebieg zjawiska jest czuły na warunki początkowe (nieprzewidywalny). Znaczy to,

że mała zmiana warunku początkowego x powoduje duże zmiany, w krótkim czasie, przebiegu trajektorii $\varphi_t(x)$ a więc i wyników pomiarów $f(\varphi_t(x))$. Niedokładność pomiaru powoduje, że nie odróżniamy dostatecznie bliskich stanów początkowych $x, \tilde{x}$. Natomiast po chwili, w zależności od tego czy proces zaczynał się w x czy $\tilde{x}$, otrzymujemy istotnie różne wyniki pomiaru. Sprawia to wrażenie, że mamy do czynienia z procesem niedeterministycznym.

Wiele zjawisk w przyrodzie charakteryzuje się opisaną wyżej niestabilnością i trudno w trakcie ich przebiegu przewidywać wyniki pomiarów. Wydaje się jednak, że średnia wartość pomiaru $\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt$ dąży do pewnej granicy $f^*(x)$ gdy $T \rightarrow \infty$. Odwzorowanie przyporządkowujące funkcji ciągłej f liczbę $f^*(x)$ definiuje ciągły funkcjonal liniowy na $C^0(X, \mathbb{R})$, a więc pewną miarę μ_x taką, że $f^*(x) = \int_X f(y) \mu_x(dy)$. Spodziewamy się więc, że dla każdego punktu $x \in X$ istnieje miara μ_x taka, że dla każdej funkcji ciągłej f , $\int_X f(y) \mu_x(dy) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt$. Miara ta opisuje prawdopodobieństwo znalezienia $\varphi_t(x)$ dla dużych t w różnych obszarach przestrzeni fazowej. Przy założeniu prawdziwości hipotezy ergodycznej, tak jest w opisanym modelu Boltzmanna, $\mu_x = m$ dla prawie wszystkich x w sensie miary Lebesgue'a m . Średnia wartość pomiaru $\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt$ dąży do $f^*(x) = \int_{\Sigma_{E_0}} f(y) m(dy)$ dla m -p.w. x .

Sądźmy, że tak też jest w modelu Lorenza, tzn. istnieje miara μ taka, że dla każdej funkcji ciągłej f i dla p.w. x (w sensie miary μ i miary Lebesgue'a) $\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \mu(dy)$ gdy $T \rightarrow \infty$. Wskazują na to pewne rezultaty matematyczne [Bu], jak też tzw. zdrowy rozsądek. Podpowiada on, że np. nie możemy przewidzieć z dokładnością do 1 stopnia temperatury we Wrocławiu w konkretnym dniu, znając rozkład temperatur w całej Europie dwa dni wcześniej. Możemy jednak przewidzieć, jaka będzie średnia temperatura dziesięciolecia z dokładnością do 0,1 stopnia i średnia ta nie zależy od tego jaki był rozkład temperatur w dniu rozpoczęcia pomiarów.

Zajmijmy się teraz „uśrednieniem” wyników pomiarów z miarowego i topologicznego punktu widzenia. Czasami wygodniej jest zamiast potoków rozważać iteracje przekształceń ciągłych. Wszystkie wyniki łatwo jednak przenieść na przypadek ciągłych potoków.

Żałujmy, że X jest zwartą przestrzenią metryczną, Φ przekształceniem ciągłym przestrzeni X w siebie, a f ciągłą funkcją rzeczywistą na X . Wszystkie miary na X , jakie będziemy rozważać będą unormowanymi miarami borelowskimi. Wprowadźmy oznaczenie $Q(\Phi, f) := \{x \in X: \text{ciąg } S_N f(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\Phi^i(x)) \text{ jest zbieżny}\}$. Oczywiście

$$Q(\Phi, f) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcap_{N, M > l} \left\{ x : |S_N f(x) - S_M f(x)| < \frac{1}{k} \right\},$$

skąd natychmiast wynika, że $Q(\Phi, f)$ jest zbiorem borelowskim. Jeśli Φ zachowuje miarę μ , to z Indywidualnego Twierdzenia Ergodycznego wynika, że $\mu(Q(\Phi, f)) = 1$.

Interesować nas będzie to, jak duży jest zbiór $Q(\Phi) := \bigcap \{Q(\Phi, f) : f \in C^0(X, \mathbb{R})\}$ tj. zbiór tych $x \in X$, dla których ciąg $\{S_N f(x)\}$ jest zbieżny dla każdej funkcji ciągłej f . Zbiór $Q(\Phi)$ można też zdefiniować jako zbiór tych $x \in X$, dla których ciąg miar $\delta_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(\Phi^i(x))$ jest zbieżny w słabej topologii. Przez $\delta(y)$ oznaczyliśmy miarę skupioną w punkcie y .

Punkt $x \in Q(\Phi)$ będziemy nazywać punktem *statystycznie regularnym*. Zauważmy, że jeśli $\{f_n\}$ jest ciągiem gęstym w $C^0(X, \mathbb{R})$ (z topologią zbieżności jednostajnej), to $Q(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q(\Phi, f_n)$. Wynika stąd, że $Q(\Phi)$ jest zbiorem borelowskim i dla dowolnej miary niezmienniczej μ względem przekształcenia Φ jest przeliczalnym przekrojem zbiorów miary pełnej, a więc i on sam jest zbiorem takiej miary. Można więc powiedzieć, że z punktu widzenia miar niezmienniczych zbiór punktów statystycznie regularnych jest zbiorem dużym. Pokażemy, że w pewnych sytuacjach zbiór ten jest I-kategorii, a więc mały z topologicznego punktu widzenia.

Twierdzenie 1 [D-G-S]. *Jeśli istnieje punkt $x \notin Q(\Phi)$, którego półtrajektoria dodatnia $\{\Phi^i(x) : i > 0\}$ jest gęsta w X , to $Q(\Phi)$ jest I-kategorii.*

D o w ó d. Z założenia wynika istnienie funkcji ciągłej f oraz liczb a i b takich, że $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) < a < b < \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N f(x)$. Zdefiniujemy zbiór

$$\begin{aligned} E &:= \{y \in X : \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(y) < a < b < \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N f(y)\} \\ &= \bigcap_{n>0} \bigcup_{i>0} \{y \in X : S_{n+i} f(y) < a\} \cup \bigcap_{n>0} \bigcup_{j>0} \{y \in X : S_{n+j} f(y) > b\}. \end{aligned}$$

Zbiory $\bigcup_{i>0} \{y \in X : S_{n+i} f(y) < a\}$ i $\bigcup_{j>0} \{y \in X : S_{n+j} f(y) > b\}$ są otwarte i gęste bo zawierają trajektorię punktu x . Wynika stąd, że E jest zbiorem gęstym typu G_δ a więc $X \setminus E$ jest I-kategorii, ale $Q(\Phi) \subset X \setminus E$, i tym samym $Q(\Phi)$ jest I-kategorii.

Pozostaje podać przykład spełniający warunki Twierdzenia 1.

P r z y k ł a d 1. Przestrzenią Ω będzie zbiór wszystkich ciągów $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, zero-jedynekowych $a_n = 0, 1$. Metryka na Ω określona jest następująco $d(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} |a_i - b_i|$. Odwzorowanie ciągłe σ działa na ciąg $\{a_n\}$ przesuwając go o jedno miejsce w lewo, tzn. $(\sigma(\{a_n\}))_i = a_{i+1}$. Skonstruujemy element $\bar{x} \in \Omega$ nie będący punktem statystycznie regularnym, którego półtrajektoria dodatnia jest gęsta w Ω .

Zbiór wszystkich skończonych ciągów zer i jedynek jest zbiorem przeliczalnym. Ustawmy go w ciąg $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Szukany element $\bar{x} = \{a_n\}$ można wybrać w postaci

$$(x_1 11 \dots 11 x_2 00 \dots 00 x_3 11 \dots 11 x_4 00 \dots 00 x_5 11 \dots).$$

Na początku kładziemy ciąg x_1 , a za nim tyle jedynek, aby średnia arytmetyczna tych wszystkich wyrazów była większa od $3/4$. Następnie kładziemy ciąg x_2 a za nim tyle zer, aby średnia arytmetyczna elementów x_1, x_2 oraz wstawionych zer i jedynek była mniejsza od $1/4$ itd. Łatwo zauważyć, że jeśli funkcja f zdefiniowana jest wzorem $f(\{a_n\}) = a_0$, to $\bar{x}$ nie należy do $Q(\sigma, f)$. Z konstrukcji $\bar{x}$ wynika, że jego półtrajektoria dodatnia jest gęsta, a tym samym spełnione są założenia Twierdzenia 1.

Przykład 1 jest dosyć prosty, ale wydać się może nieco egzotyczny i odległy od układów pojawiających się w zastosowaniach. Dlatego warto podać przykład następny, oparty w istocie na tym samym pomysśle, ale bliższy układom opisującym realne zjawiska.

Przykład 2. ATRAKTOR SMALE'A. Zaczniemy od zbadania zbioru punktów statystycznie regularnych dwukrotnego nawinięcia okręgu jednostkowego S^1 na siebie, t.j. odwzorowania zadanego wzorem $\varphi(e^{2\pi i\alpha}) = e^{4\pi i\alpha}$. Wprowadźmy oznaczenia $I_0 := \{e^{2\pi i\alpha} : 0 < \alpha < 1/2\}$, $I_1 := \{e^{2\pi i\alpha} : 1/2 < \alpha < 1\}$, $\tilde{S}^1 := \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \neq k/2^n\}$. Każdemu elementowi $z \in \tilde{S}^1$ można w jednoznaczny sposób przyporządkować element $h(z) \in \Omega$, kładąc $(h(z))_n = i$, jeśli $\varphi^n(z) \in I_i$. Odwzorowanie h jest homeomorfizmem $\tilde{S}^1$ na $\Omega := \Omega \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1)$, gdzie $\Omega_i := \{\{a_n\} \in \Omega : a_n = i \text{ dla dostatecznie dużych } n\}$. Nietrudno też wykazać, że h sprzęga odwzorowania σ i φ , tzn. $h \circ \varphi = \sigma \circ h$. Wynika stąd, że $h^{-1}(\bar{x})$ spełnia założenia Twierdzenia 1, a więc $Q(\varphi)$ jest zbiorem I-kategorii. Jego miara Lebesgue'a jest równa 1, bo φ jest przekształceniem zachowującym tę miarę.

Wykorzystując odwzorowanie φ skonstruujemy przykład odwzorowania różnowartościowego Ψ podzbioru otwartego $Y \subset \mathbb{R}^3$ w siebie, którego zbiór punktów statystycznie regularnych będzie zbiorem I-kategorii, miary Lebesgue'a pełnej. Istotne jest, że w przeciwieństwie do odwzorowania φ , Ψ miary tej nie zachowuje, a więc nie można powołać się wprost na Twierdzenie Ergodyczne.

Zbiór Y jest produktem okręgu S^1 i dysku dwuwymiarowego D^2 . Odwzorowanie Ψ zadane jest wzorem $\Psi(e^{2\pi i\alpha}, x, y) = (\varphi(e^{2\pi i\alpha}), x/10 + (\cos \alpha)/2, y/10 + (\sin \alpha)/2)$. Sens geometryczny, odwzorowania Ψ jest jasny, na S^1 działa jako dwukrotne nawinięcie okręgu na siebie, a na D^2 jak podobieństwo ze współczynnikiem $1/10$. Zbiór $\Lambda = \bigcap_{i \geq 0} \Psi^i(Y)$ nazywamy *atraktorem Smale'a*. Jest to zbiór niezmienniczy o skomplikowanej strukturze topologicznej. Lokalnie jest to produkt zbioru Cantora i odcinka [K-H]. Półtrajektoria dodatnia $\Psi^n(p)$ każdego punktu $p \in Y$ dąży do Λ gdy $n \rightarrow \infty$. Zauważmy, że to czy punkt $p \in Y$ jest statystycznie regularny zależy tylko od jego współrzędnej α , na której działa odwzorowanie φ . Wynika stąd, że $Q(\Psi) = Q(\varphi) \times D^2$, a więc $Q(\Psi)$ jest I-kategorii, miary Lebesgue'a pełnej.

W ostatnim przykładzie zbiór tych $p \in Y$ dla których ciąg miar $\{\delta_N(p)\}$ jest rozbieżny w słabej topologii jest zbiorem rezydualnym (dopełnieniem zbioru I-kategorii). Naturalne jest pytanie, jak bardzo rozbieżne są te ciągi, tzn. jak duży jest ich zbiór punktów skupienia. Można wykazać [D-G-S], że punkty $p \in Y$, dla których zbiór punktów skupienia ciągu $\{\delta_N(p)\}$ jest zbiorem wszystkich miar niezmienniczych, tworzą zbiór rezydualny. Wynika stąd, że z topologicznego punktu widzenia, prawie wszystkie punkty dają maksymalnie rozbieżne średnie czasowe.

Atraktor Smale'a jest przykładem atraktora hiperbolicznego i wszystkie własności zbioru $Q(\Psi)$ udowodnione powyżej uogólniają się na wspomnianą klasę atraktorów [R], [B-R], [D-G-S].

Przejdziemy teraz do układu równań różniczkowych, dla których zbiór punktów statystycznie regularnych ma miarę Lebesgue'a 0. Układ o tej własności znany był od wielu lat i należał do tzw. folkloru matematycznego. Dowiedziałem się o nim od F. Takensa, który przypisuje go R. Bowenowi [T]. Wydaje się, że znany był też od dawna C. Zeemanowi [G].

P r z y k ł a d 3. ATRAKTOR HETEROKLINICZNY. Przykład ten został zaczerpnięty z teorii gier i związany jest z modelami genetyki populacyjnej [H-S], [G].

Założmy, że w danej populacji każdy z osobników stosuje jedną z trzech możliwych strategii zachowania (walki). Przez analogię do popularnej gry „kamień, nożycki, papier”, pierwszą strategię oznaczmy K , drugą N , a trzecią P . Jak we wspomnianej grze, K wygrywa z N , N z P i P z K a spotkanie dwóch osobników stosujących tą samą strategię kończy się remisem. Zakładamy, że nagroda za sukces równa jest 1, porażka kosztuje -1 , a remis nie przynosi żadnych zysków ani strat. Macierz tej gry ma postać

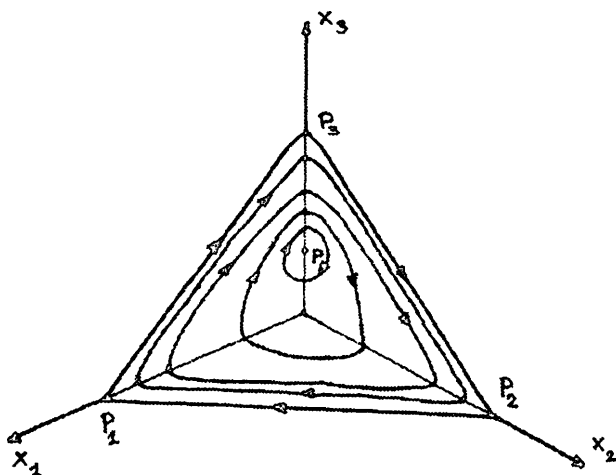
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oznaczmy przez $x_i(t)$ stosunek ilości osobników stosujących i -tą strategię do wielkości całej populacji. Zakładamy, że prędkość wzrostu i -tej frakcji $x'_i(t)$ do $x_i(t)$ równa jest średniej wypłacie dla osobnika stosującego i -tą strategię $(Ax)_i$ minus średnia wypłata dla osobnika w całej populacji xAx , czyli $x'_i/x_i = (Ax)_i - xAx$. Otrzymujemy stąd układ równań różniczkowych

$$(1) \quad x'_i = x_i((Ax)_i - xAx), \quad i = 1, 2, 3$$

opisujący ewolucję frakcji x_i . Ponieważ $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$, to cała ewolucja układu przebiega na sympleksie $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$, który jest przestrzenią fazową naszego procesu. Brzeg sympleksu S jest zbiorem niezmienniczym złożonym z trzech punktów stacjonarnych $p_1 = (1, 0, 0)$ $p_2 = (0, 1, 0)$ $p_3 = (0, 0, 1)$ będących wierzchołkami S oraz trzech orbit łączących te wierzchołki. Układ (1) ma całkę

pierwszą $x_1 x_2 x_3 = C$. Łatwo stąd wywnioskować, że wszystkie orbity leżące wewnątrz S , z wyjątkiem punktu stacjonarnego $p = (1/3, 1/3, 1/3)$, są okresowe. Portret fazowy układu (1) przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys. 1

Łatwo wykazać, że dla warunków początkowych nie leżących na brzegu S średnia frakcja osobników stosujących i -tą strategię jest równa $1/3$. Załóżmy bowiem, że $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ jest rozwiązaniem okresowym o okresie L . Przepiszmy równanie (1) w postaci

$$(2) \quad (\ln x_i(t))' = (Ax)_i - xAx \quad i = 1, 2, 3.$$

Całkując (2) po przedziale $[0, L]$ dostajemy układ równań dla średnich czasowych $\frac{1}{L} \int_0^L x_i(t) dt$, z którego wynika, że każda z nich jest równa $1/3$. W konsekwencji otrzymujemy, że $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(s) ds = 1/3$.

Zmodyfikujmy opisaną grę. Załóżmy, że premia za zwycięstwo w grze jest równa $1 - \varepsilon$, a przegrana, tak jak poprzednio kosztuje -1 . Macierz nowej gry ma postać

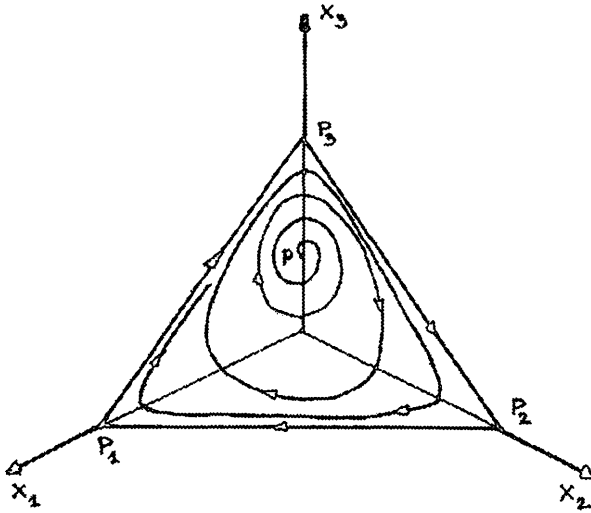
$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \varepsilon & -1 \\ -1 & 0 & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od 1. Dynamika na S opisana jest teraz układem równań różniczkowych

$$(3) \quad x_i' = x_i((A_\varepsilon x)_i - x A_\varepsilon x), \quad i = 1, 2, 3.$$

Można wykazać [G], że portret fazowy równania (3) ma postać przedstawioną na rysunku 2.

Podobnie jak w układzie (2), brzeg sympleksu S składa się z trzech punktów stacjonarnych i trzech trajektorii łączących te punkty. Różnica polega



Rys. 2

na tym, że brzeg ten stał się zbiorem przyciągającym (*atraktorem heteroklinicznym*). Orbita $x(t)$ każdego punktu z wnętrza S , z wyjątkiem punktu stacjonarnego p , dąży do brzegu S , gdy $t \rightarrow \infty$, a tym samym przebiega coraz bliżej punktów stacjonarnych p_i . Czas pobytu trajektorii w małych otoczeniach punktów p_i rośnie wraz z t wykładniczo [G], a czas przejścia od jednego takiego otoczenia do następnego zmienia się bardzo nieznacznie. Powoduje to, że bliskie orbity mogą opuszczać otoczenie p_i w różnych, dalekich od siebie momentach czasu. Układ jest tym samym *nieprzewidywalny*. Precyzyjnie można to wyrazić badając oscylacje średnich czasowych $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$. Średnie te są rozbieżne, a ich zbiór skupienia tworzy pewien trójkąt zawarty w S [G]. Nie istnieje więc miara określająca dla dużych t prawdopodobieństwo znalezienia się orbity $x(t)$ w danym podzbiórze S .

Zbiór punktów statystycznie regularnych składa się z punktu stacjonarnego p i brzegu sympleksu. Jest więc mały z topologicznego punktu widzenia, a jego miara Lebesgue'a jest 0.

Istnieje zasadnicza różnica między przykładem 2 i 3. Ten pierwszy jest stabilny. Małe C^1 zaburzenie $\tilde{\Psi}$ przekształcenia Ψ rozciąga Y w kierunku zmiennej α i ściska w kierunku transwersalnym do niego. Nietrudno stąd wywnioskować [N-S], że zbiory $Q(\tilde{\Psi})$ i $Q(\Psi)$ mają te same topologiczne i miarowe własności.

Układ (3) nie jest C^1 -stabilny. Małymi C^1 zaburzeniami możemy „zniszczyć” orbity łączące punkty stacjonarne p_i, p_{i+1} . Jeśli ograniczymy się jednak do zaburzeń specjalnego typu, to może okazać się, że układ (3) będzie względem nich stabilny [G], [G-H]. Własność ta oraz fakt, że układy tego typu pojawiają się w zastosowaniach sprawia, że są one intensywnie badane [G], [H-S], [Si].

Badając zbiór punktów statystycznie regularnych dyfeomorfizmów zwartej rozmaitości Riemanna M pojawia się w naturalny sposób następujące pytanie.

PROBLEM. Tensor metryczny zadaje na M formę objętości a tym samym miarę, którą możemy nazwać miarą Lebesgue'a. Oznaczmy przez $\text{Diff}(M)$ zbiór wszystkich dyfeomorfizmów M z C^1 topologią. Czy zbiór dyfeomorfizmów Φ , dla których $Q(\Phi)$ ma miarę Lebesgue'a pełną, jest zbiorem rezydualnym w $\text{Diff}(M)$?

Prace cytowane

- [B] L. Boltzmann, *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten*, Wissenschaftliche Abhandlungen 1 (1868), 49–96.
- [B-R] R. Bowen, D. Ruelle, *The ergodic theory of axiom A flows*, Invent. Math. 29 (1975), 181–202.
- [Bu] L. A. Bunimovich, *Statisticheskie svoistva modeli Lorenca*, Radiofizika 28 (1985), 1472–1473.
- [D-G-S] M. Denker, Ch. Grillenberger, K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lect. Notes in Math. 527 Springer-Verlag, Berlin 1976.
- [G] A. Gaunersdorfer, *Time averages for heteroclinic attractors*, SIAM J. Appl. Math. 52 (1992), 1476–1489.
- [G-H] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Structurally stable heteroclinic cycles*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), 189–192.
- [H-S] J. Hofbauer, K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.
- [K-H] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [L] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. 20 (1963) 130–141.
- [N-S] T. Nadzieja, J. Šiška, *Existence of time averages from the topological point of view*, Zastos. Mat. 20 (1988), 103–110.
- [P] J. von Plato, *Creating Modern Probability*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.
- [R] D. Ruelle, *A measure associated with axiom A attractors*, Amer. J. Math. 98 (1976), 619–654.
- [Si] K. Sigmund, *Time averages for unpredictable orbits of deterministic systems*, Ann. Oper. Res. 37 (1992), 217–228.
- [S-S] N. Simányi, D. Szász, *The Boltzmann-Sinai ergodic hypothesis for hard ball systems*, Preprint No. 26 Mathematical Institute Hungarian Academy of Sciences (1994), 1–51.
- [S] D. Szász, *Boltzmann's ergodic hypothesis, a conjecture for centuries?*, Studia Sci. Math. Hung. 31 (1996), 299–322.
- [Sz] W. Szlenk, *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1982.
- [T] F. Takens, *Heteroclinic attractors: Time averages and moduli of topological conjugacy*, Bol. Soc. Brasil Mat. 25 (1994), 107–120.