## COVID-19

Żyjemy w czasach, gdy naszym głównym zmartwieniem jest walka z koronawirusem. Do tej walki włączyła się społeczność matematyków, a jej wysiłki można śledzić na wielu forach, np.

https://www.ptm.org.pl/zawartosc/matematycy-o-koronawirusie-sars-cov-2 .

Dodajmy, w miarę naszych możliwości, do tej dyskusji swoje „trzy grosze".

Zaproponujemy bardzo prosty model rozwoju epidemii. Oznaczmy przez $C$ liczbę osób chorych, a przez $Z$ liczbę osób zdrowych. Śmiertelność nie jest bardzo wysoka, cały czas rodzą się nowi ludzie, możemy więc założyć, że całkowita liczba osobników populacji jest stała, tzn. $C + Z = const =: N$. Prędkość wzrostu liczby zarażonych jest proporcjonalna do liczby kontaktów osobników zarażonych i zdrowych, czyli liczby par $(a, b)$, $a$ oznacza osobnika zarażonego, $b$ osobnika zdrowego. Z założenia tego wynika, że liczba osobników chorych spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{dC}{dt}(t) = \lambda C(t)(Z(t) - C(t)), \tag{1}$$

przy czym $\lambda$ jest pewnym dodatnim współczynnikiem, którego w tej chwili nie znamy.

Uwaga! Część z Państwa może uważać, że równanie (1) nie ma sensu, bowiem $C$ jest liczbą osobników chorych, a więc funkcją o wartościach w zbiorze liczb naturalnych, a tym samym nie jest funkcją różniczkowalną (chyba, że jest stała, ale ten przypadek nas nie interesuje). Ci z Państwa mogą myśleć, że $C(t)$ nie jest liczbą osobników chorych, ale ich masą.

Korzystając z warunku $C + Z = N$ wyliczmy $Z = N - C$ i wstawiamy do równania (1), otrzymując

$$\frac{dC}{dt}(t) = \lambda C(t)(N - 2C(t)). \tag{2}$$

Oznaczmy $2C = y$, równanie na zmienną $y$ przybiera postać

$$\frac{dy}{dt}(t) = \lambda y(t)(N - y(t)). \tag{3}$$

Równanie (3) jest dobrze znane pod nazwą równanie Verhulsta. Jego rozwiązanie dane jest wzorem

$$y(t) = \frac{N}{1 - Ce^{-\lambda N t}}, \tag{4}$$

przy czym $C$ jest stałą, którą możemy wyznaczyć znając liczbę $y_0$ chorych w chwili $t = 0$.

**Zadanie** Sprawdzić, że funkcja dana wzorem (4) spełnia równanie (3).

Wskazówka. Należy obliczyć pochodną funkcji (4) i sprawdzić, że zachodzi równość (3).

Z warunku $y(0) = y_0$ wyliczamy $C = \frac{y_0 - N}{y_0}$. Podstawiając w (4) wyliczoną stałą $C$ dostajemy

$$y(t) = \frac{y_0 N}{y_0 - (y_0 - N)e^{-\lambda N t}}. \tag{5}$$

**Zadanie.** Wykazać, że $\lim_{t\to+\infty} y(t) = N$. Czyli wszyscy zostaną zakażeni wirusem po dostatecznie długim czasie.

**Zadanie.** Przy jakiej liczbie zakażonych $y$ wzrost zachorowań będzie najszybszy, czyli dla jakiej wartości $y$ prawa strona równania (3) jest największa.

**Zadanie.** Narysować wykres funkcji $y(t)$ dla dwóch różnych parametrów $\lambda$.

**Zadanie.** Obliczyć w jakiej chwili $t$ wzrost zachorowań jest najszybszy.

W naszym modelu występuje nieznany parametr $\lambda$. Interpretujemy $y(t)$ jako masę chorych osobników w chwili $t$, a więc $y(t)$ ma wymiar masy, $[y(t)] = M$.

**Zadanie.** Jaki jest wymiar fizyczny ma współczynnik $\lambda$, $[\lambda] =?$

Zauważmy, że kluczową rolę w naszym modelu odgrywa współczynnik $\lambda$, którego nie znamy. Załóżmy, że w pewnej chwili $\bar{t}$ określiliśmy eksperymentalnie $y(\bar{t}) =: \bar{y}$. Wiemy więc, że $y(\bar{t}) = \bar{y}$. Z równości tej obliczamy (Sprawdzić!)

$$\lambda = \frac{1}{N\bar{t}} \ln \frac{\bar{y}(N - y_0)}{y_0(N - \bar{y})}. \tag{6}$$

Jeśli $N$ jest bardzo duże w porównaniu z $\bar{y}$ i $y_0$ to możemy przyjąć, że $N - \bar{y} \approx N - y_0$. Wtedy wzór (6) przybiera postać

$$\lambda \approx \frac{1}{N\bar{t}} \ln \frac{\bar{y}}{y_0}. \tag{7}$$

Parametry $\bar{y}$ oraz $\bar{t}$ wyznaczylismy doświadczalnie, obserwując przebieg epidemii. Teraz pojawia sie nowy problem, przy pomiarach zawsze popełniamy błędy, a więc współczynnik $\lambda$ obarczony jest pewnym błędem pomiarowym $\pm\varepsilon$. Zauważmy, że jeśli popełniliśmy błąd rzędu $\pm 10^{-2}$, to we wzorze (5) zamiast czynnika $e^{-\lambda N t}$ pojawi się czynnik $e^{-\lambda N t} e^{\pm 10^{-2} N t}$. Całkowita masa populacji $N$ jest rzędu milionów, a więc $10^{-2} N$ jest dużą liczbą, która wpływa istotnie na rozwiązanie.

**Zadanie.** Oznaczmy przez $y(t)$ rozwiązanie ze wspólczynnikim $\lambda$, a przez $y_\varepsilon(t)$ rozwiązanie z doświadczalnie wyznaczonym współczynnikiem $\lambda_\varepsilon$, który różni się od $\lambda$ o wartość rzędu $10^{-2}$. Oszacować różnicę $y(t) - y_\varepsilon(t)$ dla dużych czasów $t$.

Problem dokładnego określenia współczynników w modelach matematycznych ma fundamentalne znaczenie, małe błędy w ich wyznaczaniu mogą drastycznie zmienić rozwiązania.

**Zadanie** Jak ograniczenia w poruszaniu się ludności wpływają na współczynnik $\lambda$?