
Kolokwium 1 - Topologia 2022

Zad. 1 (6) Znajdź wnętrze i domknięcie zbioru $\{f \in C[0, 1] : \exists x \in [0, 1] \ f(x) > 0\}$ w poniższych przestrzeniach podając uzasadnienia.

a) $C[0, 1]$ z metryką supremum,

b) $C[0, 1]$ z metryką całkową,

c) $C[0, 1]$ z topologią zbieżności punktowej.

Zad. 2 (6) Rozważmy $\mathbb{R}^2$ z topologią, w której bazą są zbiory postaci $K_r(x, y - r) \cup \{\langle x, y \rangle\}$, gdzie $K_r(s, t)$ oznacza koło bez brzegu o promieniu r i środku w punkcie $\langle s, t \rangle$ (czyli po prostu koła bez brzegu z dodanym punktem w „biegunie północnym”). Niech $X = [-1, 1]^2$ będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$ z powyższą topologią.

a) Czy X jest Hausdorffa? Odpowiedź uzasadnij.

b) Dla których $a \in \mathbb{R}$ ciąg $(\langle \frac{1}{n}, \frac{a}{n} \rangle)$ jest zbieżny?

c) Czy X jest zwarta? Odpowiedź uzasadnij.

d) Znajdź wnętrze i domknięcie $K_1(0, 0)$ w X .

Zad. 3 (6) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $A \subseteq X$ będzie niepustym **zwartym** podzbiorem X . Zdefiniujmy funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Pokaż, że dla każdego x istnieje taki $a \in A$, że $d(x, a) = f(x)$.