

---

## Lista Dodatkowa 1 - Topologia 2022

---

Parę zadań, które nasunęły mi się po ostatnich konsultacjach. (Nie będziemy ich przerabiać na ćwiczeniach.)

**Zad. 1** Rozważmy strzałkę Sorgenfrey'a. Jakie jest domknięcie zbioru  $[0, 1)$ ? Jakie jest domknięcie zbioru  $(0, 1]$ ? Czy  $[0, 1]$  jest zbiorem domkniętym? Otwartym?

**Zad. 2** Wprowadźmy topologię na  $\mathbb{R}$  ustanawiając bazą rodzinę zbiorów postaci  $[a, b]$  (dla  $a < b$ ). Jaką topologię dostaniemy?

**Zad. 3** Rozważmy przestrzeń z gruszką i jabłkiem:  $X = \mathbb{R} \cup \{\text{gruszka}, \text{jabłko}\}$ . Deklarujemy, że na  $\mathbb{R}$  panuje topologia dyskretna (tzn.  $\{r\}$  jest otoczeniem  $r$  dla każdego  $r \in \mathbb{R}$ ). Deklarujemy, że otoczeniami gruszki są zbiory zawierające gruszkę i prawie wszystkie liczby rzeczywiste (poza skończoną liczbą). Analogicznie definiujemy otoczenia jabłka. Dlaczego nie jest to przestrzeń Hausdorffa?

**Zad. 4** Powyższą przestrzeń można nieco poprawić do przestrzeni Hausdorffa: niech  $G = (-\infty, 0)$ ,  $J = [0, \infty)$ . Niech  $X$  będzie jak w poprzednim zadaniu. Topologię wprowadźmy podobnie, z tym, że otoczeniami gruszki niech będą zbiory zawierające gruszkę i prawie wszystkie elementy  $G$ . Analogicznie dla jabłka. Pokaż, że jest to przestrzeń Hausdorffa.

**Zad. 5** W powyższych konstrukcjach sam  $X$  nie był zbyt ważny. Nie wykorzystywaliśmy ani struktury  $\mathbb{R}$ , ani nawet struktury gruszki i jabłka. Zmieńmy więc trochę setup. Niech  $X = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$ . Niech  $A$  będzie zbiorem liczb parzystych,  $B = \mathbb{N} \setminus A$ . Niech, wreszcie,  $a$  i  $b$  będą mrówkami. Zdefiniujmy topologię w analogiczny sposób, jak wyżej (otoczeniem mrówki  $a$  są skończone podzbiory  $A$ , etc.). Upewnij się, że  $X$  jest przestrzenią Hausdorffa i że tak naprawdę  $X$  składa się z dwóch ciągów zbieżnych (do mrówek). Moglibyśmy dodać do tej przestrzeni więcej mrówek - 3, 4, ... Moglibyśmy dodać nawet nieskończenie, acz przeliczalnie wiele mrówek (wystarczy podzielić  $\mathbb{N}$  na nieskończenie wiele nieskończonych zbiorów parami rozłącznych). Czy da się dodać nieprzeliczalnie wiele mrówek? Wydaje się to niemożliwe, ale okazuje się, że tak - hasło: *przestrzeń Mrówki*: <https://dantopology.wordpress.com/tag/mrowka-space/>. (Te przestrzenie tak się nazywają nie dlatego, że składają się z mrówek, tylko dlatego, że wymyślił je Mrówka)